



CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL



POLITÉCNICA

"Ingeniamos el futuro"

Graduado en Matemáticas e Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

TRABAJO FIN DE GRADO

Coloración en triangulaciones

Autor: Guillermo Esteban Pascual

Director: Gregorio Hernández Peñalver

MADRID, JUNIO 2017

Abstract

Some of the most studied problems in Graph Theory are those referring to the coloring of the graph, being one of the most famous the Three Color Problem. A color set D for a graph G is said to be a 3-coloring if adjacent vertex has a different color of D making the graph 3-coloreable. It seems to be obvious to wonder which graphs are 3-coloreable. Nevertheless, the problem of finding sufficient conditions for a graph to be 3-coloreable in a general graph has been shown by L. Stockmayer in 1979 in his book “*Planar 3-colorability is polynomial complete*” to be NP-complete.

That is why different bounds for $\chi(G)$ are studied and stated for both arbitrary graphs and for those with a particular structure. Nonetheless, the interest in this parameter is not only to establish new bounds, but also once the bounds have been obtained, either upper or bottom, this naturally brings us the question of knowing if there exists any graph which verifies the equality.

Throughout these months, the results achieved about the 3-coloring problem for arbitrary graphs have been studied and, specifically, those results referring to the variants of the 3-coloration problem attending to the sum of colors, the distance between vertex or the parity among the apparition of certain color. This research has been performed not only from a combinatorial point of view but also from an algorithmic point of view and has been restricted to a particular kind of graph, known as maximal outerplanar graphs and denoted by its acronym as MOP's, graph of high importance in both the field of chemistry and polygon triangulations.

This project has a double purpose: on the one hand, it seeks to collect those results in the literature which have been observed to be more significant in a review paper or survey; on the other hand, it seeks to established tight combinatorial bounds for some variants of the 3-coloration concept for any n -vertex maximal outerplanar graph. Thus, as main contributions, we will prove several new tight combinatorial bounds for the following variants of coloration concept attending to the sum of the colors been used: sum-coloring, as well as the following variants attending to the existance of a rainbow path: rainbow coloring.

Keywords:

3-coloring, maximal outerplanar graph, Steinberg's Conjecture, NP-problems.

Abstract

Algunos de los problemas más estudiados en Teoría de Grafos son aquellos problemas que hacen referencia a la coloración del mismo, siendo uno de los más clásicos el problema de los Tres Colores. Un conjunto D de colores de un grafo G se dice que es una 3-coloración si vértices adyacentes tienen un color distinto de D haciendo el grafo 3-coloreable. Parece entonces obvio preguntarse qué grafos son 3-coloreables. Sin embargo, ya en 1979 L. Stockmayer en su artículo “*Planar 3-colorability is polynomial complete*” probó que este problema es NP-completo.

Es por ello por lo que se estudian y establecen cotas para $\chi(G)$ para el caso de grafos cualesquiera o para grafos con cierta estructura. Sin embargo, el interés en este parámetro no sólo radica en establecer una cota, sino que una vez obtenida dicha cota, ya sea superior o inferior, quedaría comprobar la existencia de algún grafo que verifique la igualdad.

A lo largo de estos meses de trabajo, se han estudiado los resultados obtenidos hasta la fecha en el problema de la 3-coloración de grafos en general y más concretamente sobre aquellas variantes de 3-coloración que atienden a la suma de los colores, la distancia entre vértices o la paridad en la aparición de cierto color. Este estudio se ha llevado a cabo tanto desde el punto de vista combinatorio como algorítmico y se ha restringido a un tipo particular de grafos, conocidos como grafos periplanos maximales y denominados a partir de ahora por sus siglas en inglés MOP's (maximal outerplanar graphs), grafos de gran importancia tanto en el ámbito de la química como en el de triangulaciones de polígonos.

Con este proyecto se persigue un doble objetivo: por un lado, se pretende recopilar aquellos resultados más significativos de la bibliografía en un artículo de tipo “survey”; por otro, obtener nuevos resultados sobre variantes de dominación para MOP's. Así, como aporte de nuestro trabajo, probaremos nuevas cotas que se han establecido tanto para los criterios de 3-coloración que atienden a la suma de colores utilizados en la coloración: sum-coloring, como para variantes que atienden a la existencia de caminos irisados en la coloración del grafo: coloración irisada.

Keywords:

3-coloración, grafo periplano maximal, Conjetura Steinberg, problemas NP.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Origen del Problema de los Tres Colores	1
1.1.1. Teorema de los Tres Colores	2
1.2. 3-coloración. Cuestiones generales	2
1.2.1. Triangulando 3-coloraciones	4
1.3. Técnica de la descarga	4
1.4. Definiciones	5
1.5. Grafos periplanos maximales. Importancia	6
1.6. Estudio combinatorio vs. Estudio algorítmico	6
1.7. Objetivos	7
2. Grafos periplanos	9
2.1. Propiedades importantes	10
2.2. Interpretación geométrica	12
3. Coloración	15
3.1. Teorema de Grötszsch	15
3.2. 3-coloración grafos planos	16
3.3. Coloración de Triangulaciones	20
3.4. Teorema 3-5-coloración	23
4. Variantes de coloración en Triangulaciones	27
4.1. Parity vertex	27
4.1.1. Resultados previos	28
4.1.2. Parity Vertex en triangulaciones	30
4.2. Sum Coloring	31
4.2.1. Resultados previos	32
4.2.2. Sum Coloring en triangulaciones	33
4.3. Complete coloring	40
4.3.1. Resultados previos	41
4.3.2. Complete coloring en triangulaciones	43
4.4. Rainbow coloring	44
4.4.1. Resultados previos	45
4.4.2. Rainbow coloring en triangulaciones	47
4.5. Resumen resultados obtenidos sobre coloración	50

5. NP-completitud	51
5.1. Introducción	51
5.2. Transformación de problemas	51
5.3. Problemas NP-duros y NP-completos	52
5.4. 3-SAT	52
5.5. 3-Coloración	53
Conclusión	59
Referencias	61

Capítulo 1

Introducción

En 1993, Richard Steinberg [75] definió el Problema de los Tres Colores de la siguiente forma: ¿Bajo qué condiciones pueden ser coloreadas las regiones de un grafo planar con 3 colores de tal forma que dos regiones con la misma frontera tengan distinto color? Mientras que el Problema de los Cuatro Colores no ha proporcionado resultados importantes durante muchos años, el Problema de los Tres Colores sigue más vivo, ya que genera muchos resultados y deja una abundante cantidad de problemas sin resolver. Ya que la 1-coloración es trivial y la 2-coloración de grafos es fácilmente caracterizable (ausencia de ciclos impares), la 3-coloración es el primer problema significativo de coloración de grafos.

El Problema de los Tres Colores fue considerado a parte en el año 1958 por Herbert Grötzsch. En 1963, Branko Grünbaum acució el desarrollo de la 3-coloración mejorando los resultados de Grötzsch. Años más tarde, en 1967, Oystein Ore dedicó un capítulo entero a este tema en su libro *The Four Color Problem* [67]. V.A. Aksionov proporcionó un tratamiento especial al teorema de Grünbaum ya que él y L.S. Mel'nikov fueron los autores de dos exposiciones sobre la 3-coloración en 1978 y 1980 donde se centraron en algunos desarrollos específicos que surgieron del teorema de Grötzsch. Bjarne Toft desarrolló algunas secciones en un folleto sobre coloración de grafos de 1987 [81].

1.1. Origen del Problema de los Tres Colores

Seguramente, la primera mención que se hace a la coloración de regiones de un grafo con tres colores es en 1879 en un papel de Arthur Cayley [21]. En este artículo, Cayley hizo la observación de que si un círculo se divide en un número de sectores, se requieren cuatro colores para el grafo resultante si el número de sectores es impar, pero solo se necesitan tres colores si el número de sectores es par.

El Teorema de los Tres Colores apareció en el artículo más importante de la Teoría de Grafos, realizado por A.B. Kempe en 1879 [50], en la que aparece la prueba errónea del Teorema de los Cuatro Colores.

En 1890, P.J. Heawood [42] decidió corregir la prueba de Kempe, pero terminó demostrando el Teorema de los Cinco Colores. Heawood escribió de nuevo su proposición en su posterior artículo de 1898 [43] en el que aparecen otros resultados básicos sobre 3-coloración y aparece el primer grafo publicado en el que se ilustra la 3-coloración, donde r , y y b son los colores rojo, amarillo y azul.

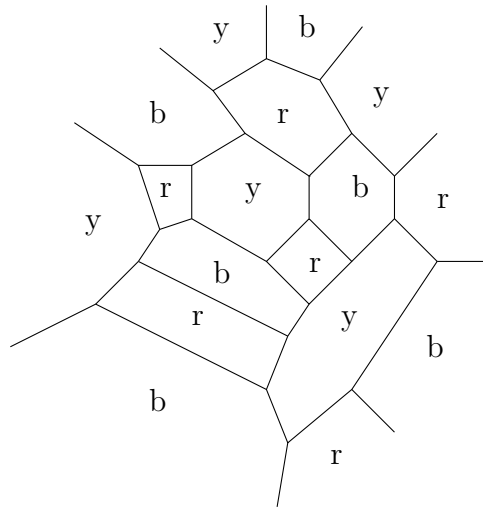


Figura 1.1: Primer grafo 3-coloreado

Uno de esos resultados básicos, es una demostración del teorema de 1880 de P.G. Tait [78]: las caras de un grafo cúbico son coloreables con cuatro colores si y solo si sus aristas son coloreables con 3 colores de tal forma que los tres colores se representen en cada vértice.

Además se incluye una demostración de que el Problema de los Cuatro Colores es un caso especial del Problema de los Tres Colores.

1.1.1. Teorema de los Tres Colores

En 1900, W. Ahrens completo el manuscrito de su libro *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* [2] que contiene una definición errónea sobre la coloración de las caras de un grafo. Este error apareció en la primera versión del libro en 1901 y volvió a aparecer sin corregir en ediciones posteriores.

En 1929, la proposición fue escrita de nuevo, esta vez correctamente, por A. Sainte-Laguë [70], aunque sin una prueba escrita. En 1936, Denis König [51] indica el error de Ahrens, aunque sin dar una demostración correcta. Finalmente, Philip Franklin [30] publicó una declaración correcta de la proposición incluyendo una prueba correcta. Franklin llamó al resultado de colorear un grafo plano mediante únicamente tres colores, “Teorema de los Tres Colores”.

1.2. 3-coloración. Cuestiones generales

La coloración de grafos planos es un problema que lleva abierto desde hace mucho tiempo, y viene inspirado por el Problema de los Cuatro Colores, en el que se propone que todo mapa plano es 4-coloreable.

Teorema 1 (*Appel-Haken* [6])

Todo grafo planar es 4-coloreable.

Para demostrar este teorema, se utilizó un método basado en un conjunto que denominaremos conjunto inevitable de configuraciones (USRC), mediante el cual se utiliza un conjunto de grafos sin vértices de grado no mayor que 4. La primera versión de la demostración utilizó 1400 de estas configuraciones. Años más tarde, apareció otra demostración más simple por parte de Robertson et al. [69] que utilizaba menos de 700 configuraciones. Sin embargo, encontrar una prueba humanamente chequeable para este teorema es un problema abierto.

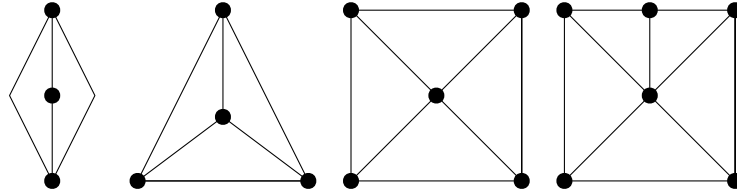


Figura 1.2: Conjunto inevitable de configuraciones de Kempe

Algunos de los teoremas que aparecieron al intentar resolver el Problema de los Cuatro Colores fueron el Teorema de Wernicke [84], que asegura la existencia en un grafo plano con grado mínimo 5 de un vértice de grado 5 adyacente a otro vértice de grado como máximo 6, y el Teorema de Franklin [30], que garantiza la existencia de un vértice de grado 5 con dos vecinos de grado como máximo 6.

El siguiente resultado de la 3-coloración no apareció hasta 35 años después del artículo de König [52]. Es un caso específico sobre k -coloración de grafos generales, es decir, un grafo no necesariamente planar.

Teorema 2 (Brooks [18])

Un grafo conexo es 3-coloreable si el grado máximo de todo vértice es 3, excepto si es K_4 .

En general, este teorema de 1941, afirma que un grafo conexo con grado máximo k es k -coloreable excepto si es K_{k+1} o un ciclo impar.

La pregunta que surgió fue: Si todos los grafos planos son 4-coloreables, ¿cuáles de ellos son 3-coloreables? El problema de decidir si un grafo plano es 3-coloreable es NP-completo, sin embargo, existen condiciones suficientes para decidir si un grafo es 3-coloreable, y es, a partir de este tipo condiciones, desde las que empezaremos nuestra tarea.

Además de averiguar condiciones suficientes que aseguren la 3-coloración de grafos planos, nos encargaremos de una variante de 3-coloración, que es la 3-coloración en triangulaciones y en grafos periplanos.

1.2.1. Triangulando 3-coloraciones

Uno de los problemas relacionados con la 3-coloración es el de la triangulación de una coloración (CCCG), es decir, el problema de determinar si dado un grafo $G = (V, A)$ con una coloración de sus vértices $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$, se puede triangular dicho grafo sin introducir aristas entre vértices con el mismo color. Si dicha triangulación existe, nos referiremos a ella como una c -triangulación y diremos que G es c -triangulable.

Este problema fue propuesto por S.K. Kannan y T.J. Warnow en [48] y venía motivado por un problema fundamental en la taxonomía numérica denominado Problema de la Filogenia Perfecta (PP), es decir, encontrar un árbol con las n especies como hojas y asignar valores de carácter de estado a los nodos internos de tal forma que el conjunto de nodos con un carácter de estado particular formen un subárbol.

Otro de los problemas relacionados con el CCCG es el de reconocer k -árboles parciales [7]. La conexión entre estos dos problemas viene de la observación de que un grafo G $(k + 1)$ -coloreado puede ser c -triangulado si y solo si G puede ser c -triangulado en un k -árbol. Usando esta observación, en [65] se propuso un algoritmo basado en el algoritmo de reconocimiento de k -árboles, que permite determinar si un grafo k -coloreado puede ser triangulado en tiempo $O(n^{k+1})$.

1.3. Técnica de la descarga

El Método de la Descarga ha sido usado en Teoría de Grafos desde hace más de 100 años. Su aplicación más famosa fue la demostración del Teorema de los Cuatro Colores.

La Descarga permite demostrar que dada una configuración del mínimo contraejemplo para un problema dado, esta configuración no se puede dar.

Además permite al grado de un vértice ser reasignado para alcanzar una cota global. Por ejemplo, cada vértice empieza con una carga igual a su grado. Para mostrar que el grado medio es menor que b , se tiene que dar una configuración en un conjunto específico S de configuraciones, tenemos su ausencia permite a la carga ser movida (vía reglas de descarga) de forma que la carga final de cada vértice sea como mínimo b lo que contradice la hipótesis.

El proceso suele ser rápido ya que a veces, la siguiente configuración reducible que hay que encontrar suele encontrarse en tiempo constante. La idea de la descarga es simple, y las pruebas suelen ser fáciles de seguir ya que tienen muchos detalles. La complejidad suele estar en la elección de configuraciones reducibles, las reglas para mover cargas y en encontrar la mejor hipótesis para el lema estructural.

1.4. Definiciones

- Un grafo es un par $G = (V, A)$ donde V es un conjunto finito no vacío (a cuyos elementos llamaremos vértices o nodos) y A es una familia finita de pares no ordenados $\{u, v\}$ de vértices de V (a cuyos elementos llamaremos aristas).
- Un subgrafo de $G = (V, A)$ es otro grafo $H = (V', A')$ tal que $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Si $V' = V$ se dice que H es un subgrafo generador de G .
- El conjunto de vértices, aristas y caras de un grafo plano M se denota por $V(M)$, $E(M)$ y $F(M)$ respectivamente.
- Un grafo es conexo si para cada par de vértices u y v existe un camino de u a v . En caso contrario se dirá que el grafo es no conexo.
- Un bucle une un vértice consigo mismo; dos vértices pueden ser unidos por varias aristas múltiples.
- Un grafo planar es un grafo que admite una representación en el plano de forma que ninguna de sus aristas se cortan, salvo en sus extremos. A la representación de este tipo de grafos se le denomina grafo plano.
- El término cúbico describe los grafos que son regulares de grado 3.
- El grado $d(x)$ de $x \in V \cup F$ es el número de aristas que inciden en x .
- Un d – vértice o una d – cara es un vértice o una cara de grado d .
- Un k -gon se define como la intersección de cuerdas dentro de un ciclo donde los extremos de las cuerdas pertenecen a ambos lados del ciclo.
- Un grafo completo es un grafo en el que todo par de vértices está unido por una arista. Se representa por K_n .
- Se dice que un vértice v de un grafo conexo G es vértice corte si $G - \{v\}$ no es conexo.
- Se dice que dos ciclos de un grafo plano son adyacentes o intersecantes si tienen una arista o un vértice en común respectivamente.
- El grafo dual M^* de un grafo plano M es el grafo de adyacencia de las caras de M .
- Una k – coloración de un grafo G es una función $\varphi : V(G) \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ siempre que $uv \in E(G)$.
- Un grafo es k – coloreable si tiene una k -coloración propia. El mínimo k tal que G es k -coloreable se denomina *número cromático*.
- Se define cintura g de un grafo G a la menor longitud de todos los ciclos de G .
- Sea G un grafo plano conexo. Un camino facial es un camino cerrado a través del límite de una cara $f \in F(G)$. El ciclo que se forma se denomina ciclo facial.

- Se define cuerda de un ciclo C como la arista que une dos vértices no consecutivos de C .
- Un 3-vértice interno que es incidente con una 3-cara se denomina malo.
- Una tetra es un camino $T = v_1v_2v_3v_4$ en el interior de un ciclo D tal que $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$ y donde $\dots xv_1v_2v_3v_4x' \dots$ está en el exterior de una cara, y existen 3-ciclos $t'v_1v_2, t'v_3v_4$ donde $t' \neq x, t \neq x'$.
- Sea f una 8-cara con el borde v_1, \dots, v_8 , donde $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7$ son vértices malos y v_4 y v_8 son vértices buenos. Supongamos que $v_2v_3t_{23}, v_5v_6t_{56}, v_1v_8t_{18}$ y $v_7v_8t_{78}$ son 3-caras adyacentes a f . Entonces f se denomina M-cara.
- Sea f una 8-cara con el borde v_1, \dots, v_8 , donde $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7$ son vértices malos y v_5 y v_8 son 4-vértices internos. Supongamos que $v_2v_3t_{23}, v_5v_6t_{56}, v_8v_1t_{18}$ y $v_4v_5t_{45}$ son 3-caras adyacentes a f . Entonces f se denomina MM-cara.
- Un MOP zigzag, “es un MOP cuyo conjunto de diagonales forman un zigzag”, es decir, un MOP con dos vértices de grado 2; dos de grado 3 cada uno de ellos adyacentes a los anteriores, y los demás de grado 4. Ver [Figura 1.3](#).

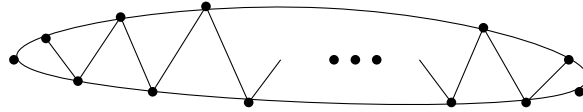


Figura 1.3: MOP zigzag

1.5. Grafos periplanos maximales. Importancia

En los últimos años ha recibido especial atención el estudio de la coloración en lo que se conocen como grafos periplanos o outerplanar graphs, y más concretamente un tipo particular de los mismos, los maximal outerplanar graphs, que a partir de ahora denominaremos por sus siglas en inglés MOP's. Debido a la estructura tan simple que presentan, los MOP's han llamado la atención en la literatura científica, por lo que existen muchos resultados estructurales y computacionales disponibles.

Esta atención está motivada por la importancia que estos tipos particulares de grafos tienen, no sólo en las triangulaciones de polígonos, ya que los grafos con esta determinada estructura que detallaremos más adelante son equivalentes a la clase de las triangulaciones de polígonos, sino también en el ámbito de la química, Leydold y Standler en [61], motivados por el análisis de la estructura de determinados biopolímeros, tales como RNA o DNA, centran su estudio en este tipo particular de grafos, y es que estos ácidos nucleicos, forman un tipo especial de estructura de contacto en lo que se conoce como estructura secundaria, siendo esta última un grafo periplano.

1.6. Estudio combinatorio vs. Estudio algorítmico

Uno de los conceptos más estudiados en Teoría de Grafos es la coloración de sus vértices o de sus aristas. Así, han aparecido en la literatura los parámetros de número

cromático o índice cromático de un grafo y sus múltiples variantes en las que se imponen restricciones adicionales a la asignación de colores.

Por otra parte, algunos problemas de visibilidad en Geometría Computacional se han resuelto, desde el punto de vista combinatorio, utilizando coloraciones de los grafos subyacentes a las estructuras geométricas correspondientes.

Durante la realización de este trabajo hemos trabajado en las diferentes variantes de coloración (paridad, sum-coloring, distancia, etc.) sobre los grafos correspondientes a triangulaciones de puntos en el plano, tanto desde el punto de vista combinatorio como algorítmico. Si $h(t)$ es el valor de un parámetro para una triangulación T , se estudian cotas para

$$h(n) = \max\{h(T) \mid T \text{ es una triangulación sobre } n \text{ puntos}\}$$

Y también se ha estudiado el problema algorítmico correspondiente: dada una triangulación T , obtener el número mínimo de colores que colorea (con las restricciones que se impongan en cada caso) todos los vértices de T .

Así, para cada condición H sobre el conjunto dominante debemos demostrar:

- **Cota inferior:** Encontrar un ejemplo de T que necesite $h(n)$ colores para que se cumpla la condición H .
- **Cota superior:** Demostrar que toda T de n vértices se puede colorear, cumpliendo la condición H , con $h(n)$ colores.

Ambas perspectivas resultan de gran interés al tratar con el concepto de dominación. Por ello se busca no sólo dar respuesta a aquellas cotas combinatorias sobre variantes de coloración aún por resolver sino también llevar a cabo el estudio de algoritmos aproximados tanto para grafos en general así como para aquellos determinados tipos de grafos para los cuales el problema sigue siendo NP-completo, considerando la posibilidad de restringir el problema a aquellas variantes de dominación que reciban especial atención.

1.7. Objetivos

Motivados por lo expuesto anteriormente, este proyecto persigue como objetivo la elaboración de un artículo tipo “survey” en el que se recopilen aquellos resultados más relevantes sobre el concepto de coloración y sus variantes, haciendo especial incidencia en las triangulaciones de polígonos y en los grafos periplanos maximales.

Este estudio se ha efectuado desde los puntos de vista algorítmico y combinatorio, obteniendo cotas ajustadas en todas las variantes de coloración para las cuales no existían resultados previos en la literatura científica. Además, pese a la NP-completitud del problema, se ha llevado a cabo un estudio minucioso de los resultados algorítmicos estudiados hasta el momento.

Capítulo 2

Grafos periplanos

Este capítulo está dedicado a los resultados más significativos sobre grafos periplanos o outerplanar graphs. Demostraremos algunas propiedades y caracterizaciones dadas por Chartrand [22] para los mismos así como para un tipo particular de estos, los grafos periplanos maximales o maximal outerplanar graphs que, como ya ha sido mencionado, reciben especial atención en este trabajo.

Definición 3 (*Grafo periplano*)

Un grafo $G = (V, A)$ es periplano o outerplanar si tiene una representación en el plano tal que todos los vértices pertenezcan al borde de la cara exterior.

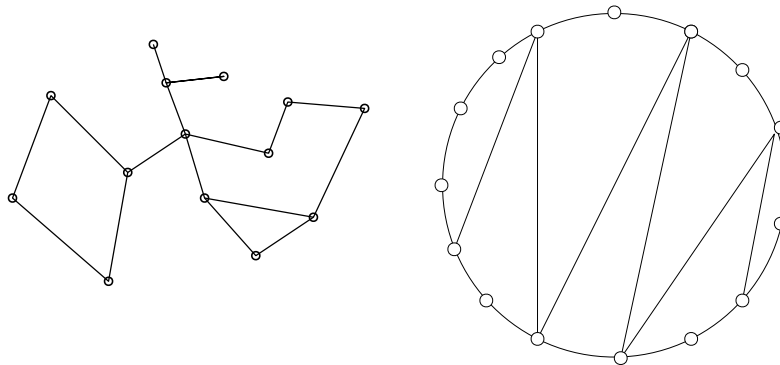


Figura 2.1: Ejemplos de grafos periplanos

Definición 4 (*Grafo periplano maximal*)

Un grafo $G = (V, A)$ periplano o outerplanar es maximal si $G + uv$ no es periplano para cualesquiera dos vértices no adyacentes u y v .

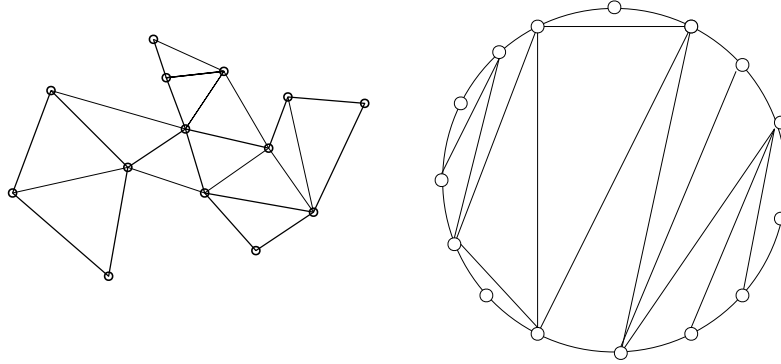


Figura 2.2: Ejemplos de grafos periplanos maximales

2.1. Propiedades importantes

El siguiente apartado lo dedicaremos a la caracterización de los grafos periplanos.

Teorema 5 (Chartrand [22])

Un grafo $G = (V, A)$ es periplano si y solo si $G + K_1$ es planar.

Demostración:

Sea $G = (V, A)$ un grafo periplano representado en el plano de manera que todos sus vértices quedan en el borde de la cara exterior. Entonces, es posible situar un vértice en la cara exterior y unirlo con el resto de vértices manteniendo la planaridad del grafo. Por tanto, $G + K_1$ es planar. Por otro lado, sea G un grafo tal que $G + K_1$ es un grafo planar. $G + K_1$ contiene un vértice u que es adyacente a todos los vértices de G . Si partimos de una representación plana de $G + K_1$ y eliminamos el vértice u , obtenemos una representación plana de G en la que todos sus vértices quedan en la frontera de la cara exterior de G . Por tanto, G es periplano.

□

Los grafos periplanos tienen además una caracterización en términos de subgrafos prohibidos.

Teorema 6 (Chartrand [22])

Un grafo $G = (V, A)$ es periplano si y solo si no contiene una subdivisión del grafo completo K_4 o del grafo completo bipartido $K_{2,3}$.

Demostración:

Supongamos que existe un grafo G que contiene un subgrafo H subdivisión del grafo completo K_4 o del grafo completo bipartido $K_{2,3}$. Por el teorema anterior, $G + K_1$ es un grafo planar. Dado que el subgrafo $H + K_1$ de $G + K_1$ es una subdivisión de K_5 o una subdivisión de $K_{3,3}$, y por lo tanto no es planar, contradiciendo la hipótesis de partida. Supongamos que existe un grafo G no planar que no contiene ningún subgrafo subdivisión de K_4 o subdivisión de $K_{2,3}$. Por el Teorema 5, $G + K_1$ no es planar pero no contiene una subdivisión de K_5 o una subdivisión de $K_{3,3}$, llegando de nuevo a una contradicción.

□

Proposición 7 (Matheson et al. [64])

Si G es un grafo periplano maximal, entonces existe una representación en el plano de G tal que el borde de la cara exterior es un ciclo hamiltoniano y cada una de las caras interiores es un triángulo.

Teniendo en cuenta este hecho, se muestran otros dos resultados sobre los grafos periplanos.

Teorema 8 (Chartrand [22])

Cualquier grafo periplano no trivial contiene, al menos, dos vértices de grado a lo sumo 2.

Demostración:

Sea G un grafo periplano no trivial. El resultado es obvio si el orden de G es cuatro o inferior, por lo que asumimos que G es un grafo de orden $n \geq 5$. El borde correspondiente a la cara exterior de G es un ciclo C hamiltoniano. Sea uv una cuerda del ciclo tal que un camino de u hasta v en C de lugar a un ciclo que contenga el menor número posible de caras interiores de G . Necesariamente, el mínimo número de caras posibles es uno. Por lo tanto, el grado del vértice y restante perteneciente a dicha cara es dos. Además, existe otra cuerda wx de C sobre el otro camino de u hasta v sobre C , dando lugar a otro vértice z de grado dos. Por lo tanto, existen dos vértices de grado dos exactamente. \square

Teorema 9 (Chartrand [22])

El tamaño de cualquier grafo G periplano de orden $n \geq 2$ es a lo sumo $2n - 3$.

Demostración:

Sea G un grafo periplano maximal de orden $n \geq 2$ y de tamaño m . Por el Teorema 5, $G + K_1$ es planar. Dado que $G + K_1$ tiene orden $n' = n + 1$ y tamaño $m' = m + n$, $m' \leq 3n' - 6$ y $m + n \leq 3(n + 1)$. Por tanto, $m \leq 2n - 3$. \square

Es fácil observar que si el grafo G es un grafo periplano maximal, entonces G es 2-conexo y hamiltoniano. De ello surgen inmediatamente los siguientes resultados.

Proposición 10

Sea G un grafo periplano maximal de orden $n \geq 4$. Si G tiene k triángulos interiores, entonces tiene $k + 2$ vértices de grado 2.

Demostración:

La demostración resulta trivial, pues basta calcular el número de hojas del árbol dual de G , valor que viene dado por la fórmula.

$$l = 2 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 + \dots$$

donde t_i es el número de vértices de grado i .

□

El resultado anterior resulta de especial utilidad en el siguiente lema.

Lema 11

Si G es un grafo periplano maximal de orden $n \geq 3$, entonces tiene $n - 1$ caras y el único ciclo hamiltoniano que queda en la cara exterior tiene $n - 3$ diagonales, aristas que no pertenecen al ciclo pero que conectan dos vértices del mismo.

Demostración:

En primer lugar es necesario observar que si G tiene n_f caras y su ciclo hamiltoniano de la cara exterior tiene n_c diagonales, entonces G tiene un total de $n + n_c$ aristas, por lo que, usando la fórmula de Euler, obtenemos que $n_f = n_c + 2$. El grafo dual G^* de G tiene $n_f - 1$ vértices de grado 3 y un vértice de grado n . Sumando el grado de los vértices de G^* obtenemos que $(n_f - 1) + n = 2(n + n_c)$. Se obtiene así $n_f = n - 1$ y $n_c = n - 3$.

□

2.2. Interpretación geométrica

Una de las razones detrás del estudio particular de los grafos periplanos maximales reside en los recintos poligonales que constituyen una buena aproximación de cualquier tipo de escenarios, siendo los MOP's los grafos de las triangulaciones de estos recintos, descomposiciones en piezas más pequeñas apropiadas para su estudio. Es decir, la triangulación de un polígono se corresponde con un grafo periplano maximal, de los que cabe destacar el hecho de que pueden ser representados de modo que todos los vértices que lo componen queden situados en una única circunferencia y las aristas sean cuerdas de ella.

El siguiente resultado, fue publicado en 1905 por el estudiante húngaro Dénes König.

Teorema 12 (König [52])

Todo grafo periplano es 3-coloreable.

Teorema 13

Todo MOP es 3-coloreable.

Demostración:

La demostración se realiza por inducción sobre el número de vértices. Para $n = 3$, el MOP es un triángulo, que es 3-coloreable. Supongamos que toda triangulación de un MOP con $n - 1$ vértices es 3-coloreable. Sea T una triangulación de un MOP P . En T existe un vértice v de grado 2, que corresponde a una hoja del árbol dual T^* de la triangulación T . El grafo $T - v$ tiene $n - 1$ vértices, es la triangulación de un MOP y por hipótesis de inducción se puede 3-colorear. Coloreando adecuadamente el vértice v tenemos así una 3-coloración para T .

□

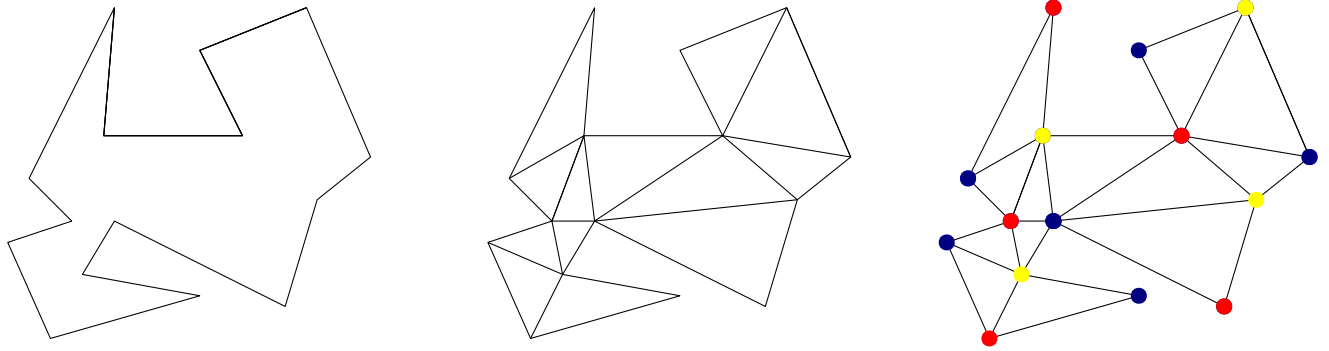


Figura 2.3: ejemplo de una 3-coloración de un MOP

Kooshesh y Moret en su artículo [53] dan un algoritmo que 3-colorea la triangulación de un polígono en tiempo lineal.

Este algoritmo parte de la triangulación T de un polígono y de un listado ordenado de sus vértices v_1, \dots, v_n atendiendo al orden natural en el que estos aparecen al recorrer el borde de T y asigna los colores $\{1, 2, 3\}$ a cada vértice dependiendo de la paridad de su grado.

Algoritmo 14 (*Moret et al.*)

Entrada: $L = v_1, v_2, \dots, v_n$ de los vértices de la triangulación T de un polígono P y el grado de cada vértice.

Salida: Una 3-coloración propia de T usando como etiquetas el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Paso previo: v_1 se colorea con el color 1 y v_2 con el color 2.

Estrategia: Sea v_{i+1} el siguiente vértice a colorear. Si el vértice v_i tiene grado impar, entonces v_{i+1} recibe el color de v_{i-1} .

En cualquier otro caso, v_{i+1} recibe el color de $6 - \text{color}(v_{i-1}) - \text{color}(v_i)$.

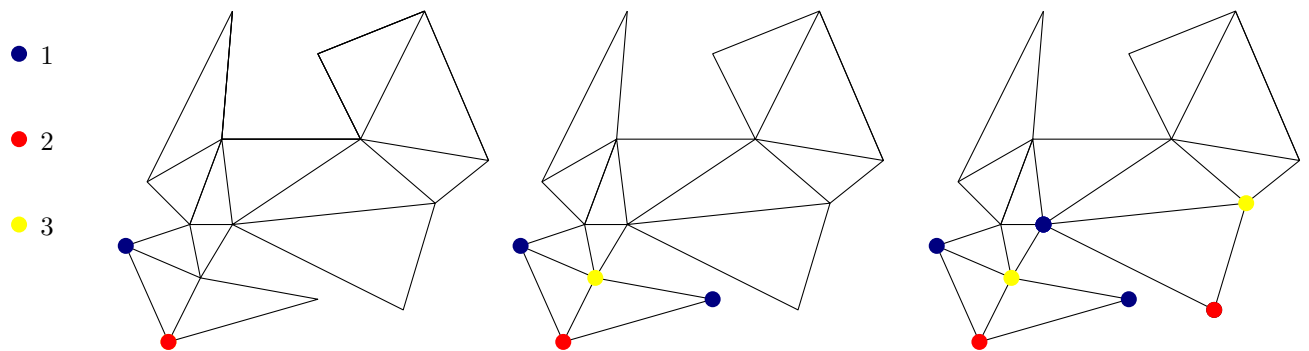


Figura 2.4: Algoritmo de Moret

La complejidad del algoritmo es lineal $O(n)$ donde n es el número de vértices, ya que hay que ir recorriendo todos los vértices del grafo.

Demostración:

La demostración se realiza por inducción sobre el número de vértices. Supongamos que añadimos un vértice p externo a T entre los vértices p_i y p_{i+1} con las aristas $\{p, p_i\}$ y $\{p, p_{i+1}\}$. A pesar de que esta adición cambia la paridad de p_i y de p_{i+1} , el algoritmo sigue asignando el mismo color a los vértices p_{i+1} y p_{i+2} . Como el grado de p_{i+2} no se ha cambiado, el algoritmo procede como en el caso de la hipótesis y así produce una coloración válida.

□

Capítulo 3

Coloración

En este capítulo, introduciremos los teoremas más importantes de la 3-coloración, en los que se dan condiciones suficientes para que un grafo sea 3-coloreable, así como algunas de las demostraciones a estos teoremas. Y por último, trataremos algunos aspectos sobre la 3-coloración en grafos en los que todas sus caras son 3-ciclos.

Definición 15 (*Coloración*)

Dado un grafo $G = (V, A)$, una coloración de dicho grafo es una asignación de etiquetas denominadas colores a los elementos del grafo sujetos a ciertas restricciones. El número cromático de G es el menor número de colores que se necesitan para colorear un grafo y lo notamos por $\chi(G)$.

3.1. Teorema de Grötzsch

El Teorema de los Tres Colores caracteriza la 3-coloración de los vértices para grafos planares en los cuales toda cara es un 3-ciclo.

Entre 1956 y 1962, Herbert Grötzsch publicó una serie de dieciséis artículos bajo el nombre de *On the Theory of Discrete Structures*. Muchos de estos artículos trataban propiedades combinatorias de alguna clase especial de grafos planos. Sin embargo, uno de los resultados del séptimo artículo, publicado en 1958 en [34] titulado *A Three-Color Theorem for Triangle-free Networks on the Sphere*, fue sorprendente: Todo grafo planar sin 3-ciclos es 3-coloreable.

Teorema 16 (*Thomassen [79]*)

Sea G un grafo planar con cintura mayor o igual a 5, $g \geq 5$. Entonces G es 3-coloreable. Y además, si G tiene un ciclo exterior C de longitud menor o igual que 9, entonces toda 3-coloración de $G(C)$ puede extenderse a una 3-coloración de G , a no ser que C tenga longitud 9 y $G - C$ tenga un vértice unido a tres vértices de C , que tienen distintos colores.

Teorema 17 (Grötzsch [34])

Todo grafo plano sin 3-ciclos es 3-coloreable; es más, toda 3-coloración propia de un 4- o 5-ciclo se puede extender a una 3-coloración del grafo entero.

La demostración propuesta por Herbert Grötzsch se realizaba por inducción sobre el número de vértices más el de aristas y utilizando el método de las configuraciones reducibles. Para cada configuración reducible, se obtenía una reducción, es decir, se mostraba cómo un grafo que contiene estas configuraciones reducibles puede ser 3-coloreado de acuerdo con el teorema. Esta demostración era muy compleja, por lo que en el año 2003, Thomassen [79] realizó otra demostración más elegante en la que lo relacionaba con el Teorema 16.

Definición 18

En toda 3-coloración de los vértices de un 5-gon, dos vértices se colorean del color uno, dos vértices con el color 2 y el vértice restante, denominado vértice especial, se colorea con el color 3. La arista del 5-gon opuesta al vértice especial, se denomina arista especial.

Teorema 19 (Grünbaum)

Si G es un grafo con como máximo tres 3-ciclos, entonces:

1. *G es 3-coloreable.*
2. *Si G tiene como máximo un 3-ciclo, y como mínimo un 4- o un 5-gon, entonces toda 3-coloración propia puede extenderse al grafo entero suponiendo que esta cara no es un 5-ciclo y cuya cara especial no es un 3-ciclo.*

3.2. 3-coloración grafos planos

Definición 20 (*Distancia triangular*)

Un ciclo C se denomina triangular si es adyacente a un 3-ciclo distinto de C . Sea d^∇ la mínima distancia entre dos 3-ciclos.

La pregunta sobre cómo afecta el posicionamiento relativo de los 3-ciclos en un grafo planar a la 3-coloración fue primeramente propuesta por Grünbaum. En su artículo de 1963 menciona que es incapaz de probar la siguiente conjetura:

Conjetura 21

Si G es un grafo planar que no es 3-coloreable, entonces contiene dos pares de triángulos incidentes.

En 1969, Havel [41] refutó esta conjetura consiguiendo un grafo planar que no es 3-coloreable con cuatro triángulos, ninguno de los cuales tienen un vértice en común, por lo que se preguntó si todo grafo planar con distancia triangular suficientemente grande es 3-coloreable. Y se preguntó también si esa distancia podía ser 2. En 1970 [40] se respondió a

si mismo negativamente construyendo un grafo planar que no era 3-coloreable con $d^\nabla = 2$ con seis triángulos. Más tarde, Mel'nikov y Aksionov propusieron otro contraejemplo con cuatro triángulos.

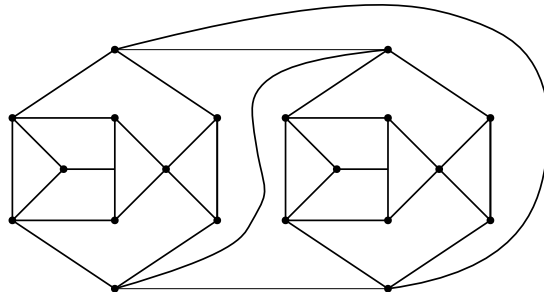


Figura 3.1: Contraejemplo Aksionov-Mel'nikov

El siguiente resultado prueba que la mezcla de los problemas de Havel y Steinberg, tiene una solución positiva; todo grafo que satisfaga ambas condiciones es 3-coloreable.

Teorema 22 (Borodin, Raspaud [17])

Toda 3-coloración propia de una cara de tamaño 3 ó 7 en un grafo plano conexo sin un par de 3-ciclos a distancia menor que 4 ni 5-ciclos puede extenderse a una 3-coloración propia del grafo entero.

Teorema 23 (Borodin, Raspaud [17])

Todo grafo planar con $d^\nabla \geq 4$ y sin 5-ciclos es 3-coloreable.

El problema de Havel, fue resuelto positivamente por Dvořák, Král y Thomas.

Teorema 24 (Dvořák, Král, Thomas [28])

Existe una constante d tal que todo grafo planar con $d^\nabla \geq d$ es 3-coloreable.

La siguiente conjetura es la versión más fuerte posible del problema de Havel (SVHP).

Conjetura 25 (Borodin, Raspaud [17])

Todo grafo planar con $d^\nabla \geq 4$ es 3-coloreable.

Teorema 26 (Borodin, Glebov, Jensen [12])

Todo grafo planar con $d^\nabla \geq 4$ y sin 5-ciclos triangulares es 3-coloreable.

La siguiente conjetura posiblemente sea un paso intermedio para resolver el SVHP.

Conjetura 27 (Borodin, Glebov, Jensen [12])

Todo grafo planar con $d^\vee \geq 4$ y sin 4-ciclos triangulares es 3-coloreable.

En 1976, Richard Steinberg propuso la siguiente conjetura, la cual estuvo en la lista de problemas sin resolver hasta hace unos meses, fecha en la cual se encontró un contraejemplo para dicha conjetura.

Conjetura 28 (Steinberg [75])

Uno de los mayores problemas de coloración de grafos es la Conjetura de Steinberg. La conjetura afirma que todo grafo planar con ciclos de longitud 4 ó 5 es 3-coloreable. Sin embargo, la conjetura ha sido demostrada falsa con la obtención de un contraejemplo que además, también desmiente otras dos conjeturas como son:

1. *Conjetura Fuerte de Bordeaux [17]: Todo grafo planar sin ciclos de longitud tres que compartan una arista y sin ciclos de longitud cinco es 3-coloreable.*
2. *Conjetura de los 3 Colores de Novosibirsk [13]: Todo grafo planar sin un ciclo de longitud tres que comparta arista con un ciclo de longitud tres o cinco (o, equivalentemente, 4 ó 5) es 3-coloreable.*

Contraejemplo [23]

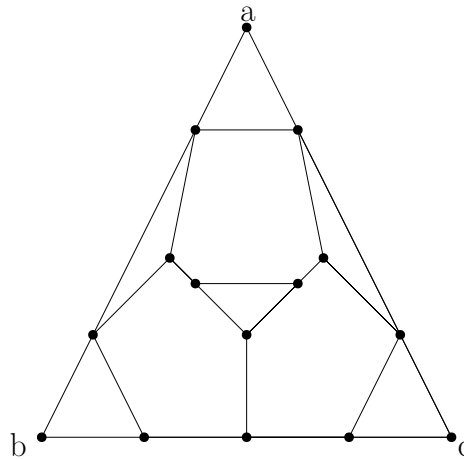


Figura 3.2: Grafo G1

El grafo G1 no tiene ciclos de longitud cuatro o cinco y no existe una 3-coloración que asigne el mismo color a los tres vértices a, b, y c.

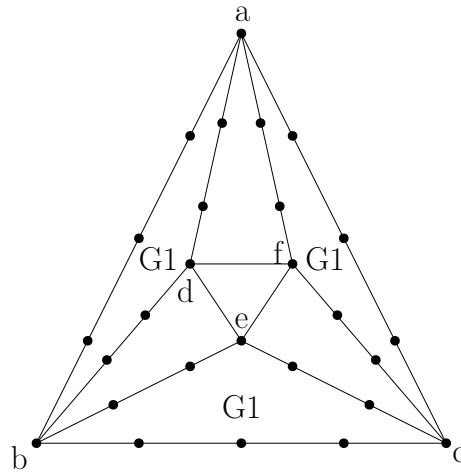


Figura 3.3: Grafo G2

El grafo G2 no tiene ciclos de longitud cuatro o cinco y no existe una 3-coloración que asigne el mismo color a los tres vértices a, b, y c.

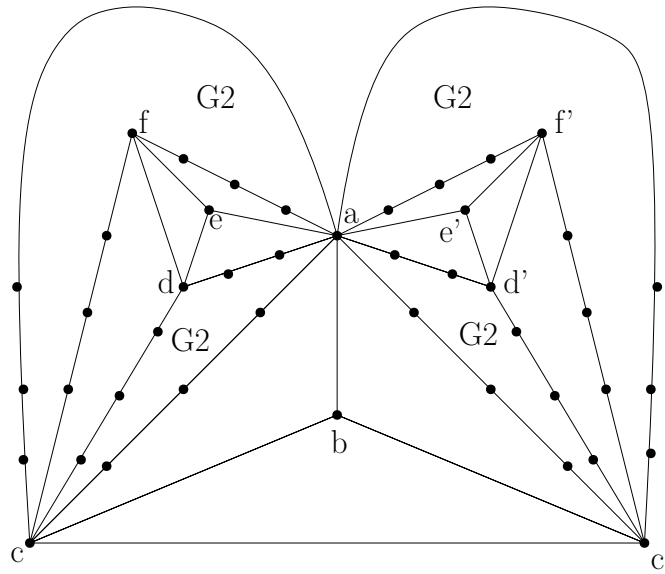


Figura 3.4: Grafo G3

El grafo G3 es un grafo planar sin ciclos de longitud cuatro o cinco que no es 3-coloreable.

Esta conjetura dio lugar a otro problema propuesto por Paul Erdős [29] en el que se preguntaba si existía una constante C tal que la ausencia de ciclos de longitud de 4 a C en un grafo planar garantizaba la 3-coloración de dicho grafo.

Primeramente, Abbot y Zhou [1] encontraron una cota para C en 11, más tarde, fueron Borodin [10] y Sanders-Zhao [72] por separado los que rebajaron esa cota a 9 y finalmente, Borodin et al. [16] propusieron la cota final de $C \leq 7$.

Teorema 29 (Borodin, Glebov, Raspaud, Salvatipour [16])

Sea \mathcal{G}_7 la clase de grafos planares sin ciclos de longitud de 4 a 7. Entonces, toda 3-coloración propia de los vértices de cualquier cara de longitud de 8 a 11 en un grafo conexo perteneciente a \mathcal{G}_7 se puede extender a una 3-coloración propia del grafo entero.

Teorema 30 (Borodin, Glebov, Raspaud, Salvatipour [16])

Todo grafo planar sin ciclos de longitud de 4 a 7 es 3-coloreable.

Borodin et al. [14], además, mejoraron el resultado obtenido en [16] demostrando que todo grafo planar sin 5- ni 7-ciclos y sin 3-ciclos adyacentes es 3-coloreable.

Conjetura 31 (Borodin, Raspaud [17])

Todo grafo planar con $d^\nabla \geq 1$ y sin 5-ciclos es 3-coloreable.

Teorema 32 (Borodin, Glebov [11])

Todo grafo planar con $d^\nabla \geq 2$ y sin 5-ciclos es 3-coloreable.

Una generalización del Teorema de Grötzsch fue obtenido por Borodin et al.

Teorema 33 (Borodin, Glebov, Jensen, Raspaud [13])

Todo grafo planar sin ciclos triangulares de longitud de 4 a 9 es 3-coloreable.

Teorema 34 (Borodin, Glebov, Raspaud [15])

Todo grafo planar sin ciclos triangulares de longitud de 4 a 7 (o, equivalentemente, sin ciclos triangulares de longitud de $\{3, 5, 7\}$ a $\{4, 5, 7\}$) es 3-coloreable.

Aksenov [3] e, independientemente, Jensen y Thomas [45], demostraron el siguiente teorema que ampliaba el Teorema de Grötzsch: para cada par de vertices x e y de un grafo plano G sin 3-ciclos, existe una 3-coloración de G tal que x e y tienen un color distinto. Además, Aksenov, Borodin y Glebov [5] demostraron un resultado similar: para cada par de vertices x e y no adyacentes, existe una 3-coloración tal que x e y tienen asignado el mismo color.

3.3. Coloración de Triangulaciones

En el lenguaje de grafos, una triangulación es un grafo planar maximal, es decir, un grafo, tal que, al dibujarlo en el plano, todas sus caras son triángulos.

Además, deberemos distinguir dos casos: si la cara no acotada no es triangular, en cuyo caso hablaremos de casi-triangulación, o si la cara no acotada es triangular, en cuyo

caso utilizaremos el término “grafo planar maximal”.

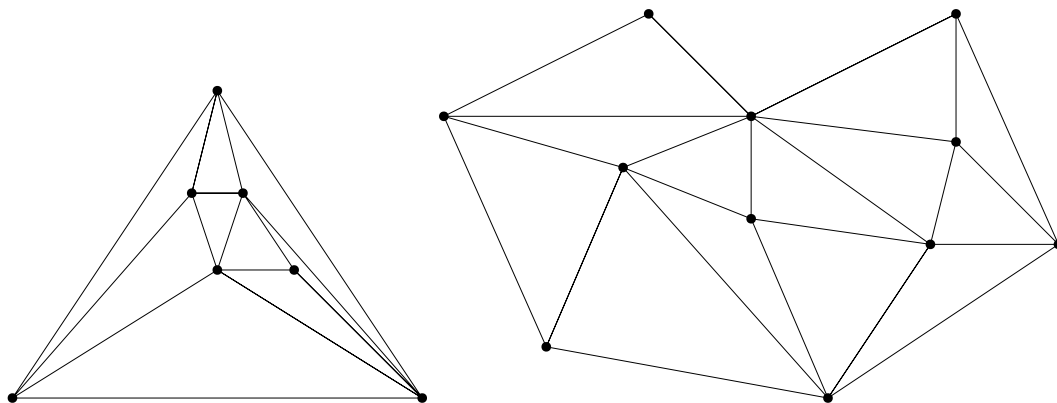


Figura 3.5: Grafo planar maximal y casi-triangulación

Definición 35 (*Grafo euleriano*)

Se dice que un grafo conexo G es euleriano si el grado de todos sus vértices es par. Esto implica que tiene un circuito simple que pasa por todas las aristas.

Durante el siglo XIX se propuso el siguiente teorema relacionado con las triangulaciones eulerianas, pero no fue hasta mucho más tarde cuando se pudo publicar una prueba que lo demostrase.

Teorema 36 (*Heawood*)

Un grafo planar maximal es 3-coloreable si y sólo si todos sus vértices son pares.

Demostración:

Esta demostración realizada por Tsai y West [83], utiliza el hecho de que los grafos planos eulerianos tienen circuitos “non-crossing” (sin cruces), y además, es válida para casi-triangulaciones. Definiremos un vértice v como “crossing” en un circuito euleriano C de un grafo plano si dadas cuatro aristas e, e', f, f' ; e' sigue a e y f' sigue a f en C , de forma que $\{e, e'\}$ se alterna con $\{f, f'\}$ en la rotación cíclica de las aristas que inciden en v .

■ Lema 37 (*Tsai y West [83]*)

Todo grafo plano euleriano tiene un circuito euleriano sin cruces.

Demostración:

Sea C un circuito euleriano con el menor número de cruces. Supongamos que $\{e, e'\}$ y $\{f, f'\}$ forman un cruce donde e' sigue a e y f' sigue a f . Hacemos que f siga a e y e' a f' , de forma que se elimine el cruce, con lo que no aumenta el número de cruces.

□

■ **Lema 38** (Tsai y West [83])

En toda casi-triangulación euleriana, el número de aristas es divisible por 3.

Demostración:

La demostración se realiza por inducción sobre el número t de caras acotadas. Si $t = 1$, la triangulación es un 3-ciclo. Sea G una triangulación con t triángulos y supongamos cierto el resultado para toda triangulación con menos de t triángulos. Sea F una cara acotada de G con una arista externa. Eliminamos de G las tres aristas de la cara F y obtenemos otro grafo G' , que es la unión de triángulos con menos de t triángulos. Por hipótesis de inducción, el número de aristas de G' es múltiplo de 3 y, por tanto, también lo es el de G .

□

■ **Lema 39** (Tsai y West [83])

En un circuito euleriano sin cruces de una casi-triangulación euleriana, la longitud de todo subcircuito es divisible por 3.

Demostración:

Sea C' un subcircuito. Procedemos por inducción sobre el número de caras encerradas en C' . Si solo existe una cara, entonces la longitud es 3. Sea v el primer y último vértice de C' . Sea H el subgrafo de G que consiste en todos los vértices y aristas de C' y todos los vértices y aristas de G contenidos en el interior de C' . Si C' atraviesa a H , como C' es un circuito, y H es una casi-triangulación euleriana, por el Lema 42, su longitud es divisible por 3.

De otra manera, alguna otra parte de C entra en el interior para atravesar las otras aristas de H . La penetración puede ser por v o por otro vértice externo de H que es visitado más de una vez por C' . Como C' no tiene cruces, cada porción de C tiene que abandonar el interior por el mismo vértice externo de H por el que entró. Con esto concluimos que H es una triangulación euleriana, por lo que el número de aristas es divisible por 3.

Como cada incursión del resto de vértices de C en el interior de H sale por el mismo vértice por el que entró, forma un subcircuito de C que encierra menos caras que C' . Por la hipótesis de inducción, su longitud es divisible por 3. Por lo tanto, restando las longitudes de todas las incursiones desde el tamaño de H para obtener la longitud de C deja un múltiplo de 3.

□

Ahora ya podemos demostrar el teorema.

Sea C un circuito euleriano sin cruces de una triangulación G . Asignamos los colores 1, 2 y 3 cíclicamente a los vértices según aparecen al recorrer C . Cuando alcanzamos un vértice ya coloreado se completa un subcircuito, que por el Lema 39, tiene longitud múltiplo de 3, luego se asigna el mismo color. Por tanto, la coloración es consistente y asigna colores distintos a vértices adyacentes.

Otro teorema que trata la 3-coloración en triangulaciones eulerianas es el siguiente.

Teorema 40

Si todos los vértices interiores de una triangulación son pares, entonces es 3-coloreable.

Demostración:

Supongamos en primer lugar, que la triangulación T es 3-conexa, es decir, no contiene una arista separadora. En este caso, construimos otra triangulación T_2 en una superficie esférica “pegando” dos copias de T las aristas del borde de la cara exterior. Se puede visualizar esto colocando el borde en el ecuador, una copia de T en el hemisferio norte y la otra copia en el hemisferio sur. Este grafo T_2 es un grafo planar maximal con todos sus vértices pares. Por tanto es 3-coloreable y también lo es T . Si T no es 3-conexo, podemos 3-colorear cada una de sus componentes 3-conexas por separado y luego conseguir una 3-coloración de T de forma sencilla, intercambiando colores en alguna componente si es preciso.

□

3.4. Teorema 3-5-coloración

Sea f la cara exterior de un grafo plano G . El Teorema de la 3-5-coloración demostrado a continuación afirma que los vértices de G pueden ser coloreados con cinco colores usando como máximo tres de ellos en la frontera de f .

Para demostrar el teorema, Bernhart se valió de los siguientes tres lemas.

Lema 41

Si G es un grafo planar maximal entonces tiene al menos 4 vértices de grado menor o igual a 5.

Demostración:

Si n_j es el número de vértices de grado j ,

$$3n_3 + 4n_4 + \dots + kn_k = 2q = 6n - 12$$

Llamamos $A = n_3 + n_4 + n_5$,

$$3(n_3 + n_4 + n_5) + 6n_6 + kn_k \leq 6n - 12$$

luego

$$3A + 6(n - A) \leq 6n - 12 \Rightarrow 3A \geq 12 \Rightarrow A \geq 4$$

□

Lema 42 (Bernhart [8])

Si G es un grafo planar maximal entonces $\chi(G) \leq 3$.

Lema 43 (Bernhart [8])

Si G es una casi-triangulación, entonces, o bien existe un vértice $x \in C$, siendo C la cara exterior, tal que $d(x) \leq 4$, o bien existe un vértice z interior, $z \notin C$ con $d(z) \leq 5$.

Demostración:

Si no es cierto el resultado, entonces $d(x) \geq 5 \forall x \in C$ y $d(z) \geq 6 \forall z \notin C$. Se construye $G' = G + \{v\}$ añadiendo un vértice v que sea adyacente a todos los de C . Así, todos (salvo posiblemente v) los vértices de G' tienen grado al menos 6, en contradicción con el Lema 41. □

El teorema principal se puede demostrar ya mediante inducción sobre el número de vértices.

Teorema 44 (Bernhart [8])

Todo grafo plano admite una 5-coloración que tiene sólo 3 colores en los vértices de su cara exterior.

Demostración:

La demostración se realiza sobre n . Para $n = 3$, la demostración es trivial.

La hipótesis de inducción consiste en suponer que el resultado es cierto para todo grafo plano con menos de n vértices.

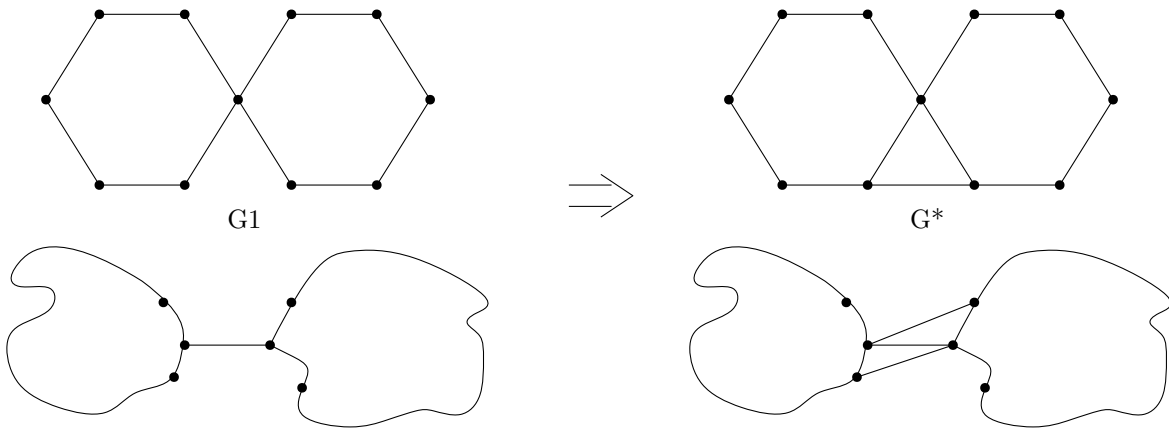
Sea G plano con n vértices. Añadimos aristas para que todas las caras interiores sean triángulos, así tenemos G^* . Si lo demostramos para G^* , la misma coloración cumpliría las condiciones para G .

Si G es un grafo plano, podemos eliminar los vértices de grado 1 del borde exterior a efectos de la 3-5-coloración $G_1 = G - \{\text{vértices grado 1}\}$.

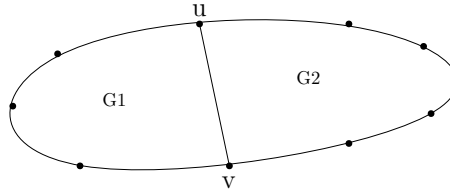
G admite 3-5-coloración $\iff G_1$ admite 3-5-coloración.

De G_1 podemos pasar a una casi-triangulación G^* con los mismos vértices en la cara exterior. Con esto,

G_1 admite 3-5-coloración $\iff G^*$ admite 3-5-coloración.

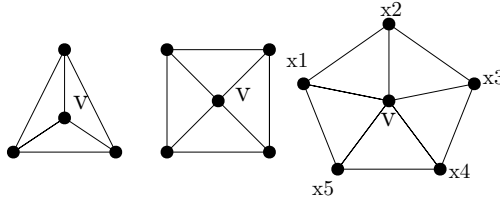


- Caso 1: G^* tiene una diagonal separadora uv .



Por hipótesis de inducción, se puede 5-colorear G_1 y G_2 con 3 colores en sus bordes. Permutamos los colores para que las ternas exteriores coincidan.

- Caso 2: no hay diagonal separadora y existe $v \in C$ (interior) con $d(v) \leq 5$. Si $d(v) = 3$ ó 4, aplicamos la hipótesis de inducción a $G^* - \{v\}$ y tenemos un color libre para v .



Si $d(v) = 5$ y en sus vecinos no aparece algún color, por hipótesis de inducción en $G^* - \{v\}$.

Si sus vecinos utilizan los 5 colores, entonces elegimos una pareja de vecinos no adyacentes, (que existen porque G^* es plano y no contiene a K_5). Supongamos que x_1, x_3 no son adyacentes. Identificamos los vértices x_1, x_3, v obteniendo G' con $n - 2$ vértices. Por hipótesis de inducción admite una 5-coloración con 3-colores en el borde.

Coloreamos ahora G^* . Los vértices que estaban en G' con el mismo color que allí. A x_1 y x_3 les ponemos el color de su identificado. Así queda un color libre para v .

- Caso 3: no hay diagonal separadora y existe $z \in C$ (borde) con $d(z) \leq 4$.

Consideramos el grafo H que resulta al eliminar los vértices del ciclo C . H es plano y por hipótesis de inducción, admite una 5-coloración que utiliza en el borde sólo 3 colores (por ejemplo los colores 3, 4 y 5).

El vértice z sólo tiene a lo sumo 2 vecinos interiores que se colorean con 4 y 5. Coloreamos z con el color 3 y el resto del ciclo C con los colores 1 y 2.

Así tenemos una 5-coloración de G^* con los colores 1, 2 y 3 en C .

□

Bernhart encontró un resultado similar para la 3-4-coloración gracias a la siguiente conjetura. Debido a que este resultado se propuso en 1975, años antes de demostrarse el Teorema de los Cuatro Colores, la demostración no fue demostrada en [8]. Sin embargo, nosotros hemos decidido añadirla a continuación.

Conjetura 45 (Bernhart [8])

Todo grafo plano se puede 4-colorear de modo que los vértices de la cara exterior solo presentan 3 colores.

Demostración:

Sea G un grafo plano. Construimos G^* añadiendo un vértice z y le hacemos adyacente a cada vértice de la cara exterior C .

G^* es plano $\Rightarrow G^*$ es 4-coloreable.

Así, los vértices de C reciben sólo 3-colores, pues todos son adyacentes a z .

□

Capítulo 4

Variantes de coloración en Triangulaciones

Mediante la imposición de diferentes condiciones de conectividad, distancia,... se obtienen algunas de las variantes de coloración.

En este capítulo, presentaremos algunos resultados ya conocidos de estas variantes y las estudiaremos en grafos periplanos maximales y en triangulaciones en general, mostrando los resultados obtenidos con anterioridad para MOP's sobre coloración y presentaremos como aportación de nuestro trabajo nuevos resultados para las variantes de coloración Sum coloring, Rainbow coloring,...

4.1. Parity vertex

Definición 46 (*Parity vertex coloring*)

Una parity vertex coloring o coloración por paridad de un grafo plano 2-conexo $G = (V, A)$ es una coloración propia de los vértices V de G de forma que para cada cara f y cada color i , o bien 0, o bien un número impar de vértices que inciden con f son coloreados con el color i . El número cromático de paridad $\chi_p(G)$ de G es el menor número de colores utilizados en una coloración parity vertex de G .

El concepto de coloración por paridad fue introducido recientemente por Bunde, Milans, West y Wu en su artículo [19], sin embargo, ellos se centraron en el concepto de coloración de aristas por paridad, un problema NP-completo incluso cuando se trata de un árbol.

Sin embargo, nosotros nos centraremos en esta variante de coloración por paridad, pero enfocado a los vértices del grafo, lo que se puede relacionar con el concepto de coloración cíclica propuesta por Ore y Plummer en [68].

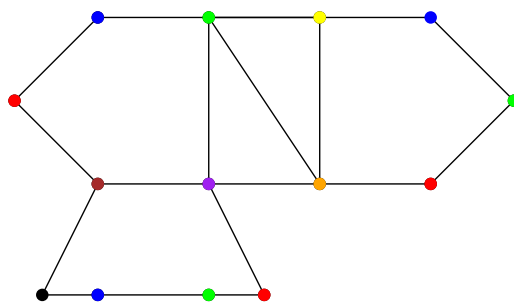


Figura 4.1: Grafo periplano de orden 14 con $\chi_p(G) = 8$

4.1.1. Resultados previos

Para este tipo de coloración encontramos un teorema en el que se analiza una cota superior para grafos planos en general.

Teorema 47 (Czap et al. [27])

Para todo grafo G plano 2-conexo, se tiene que:

$$\chi_p(G) \leq 118$$

La demostración al teorema utiliza el método de la descarga. Se supone que existe un contraejemplo al teorema. Sea G ese contraejemplo con el menor número de vértices n y el menor número de aristas de entre todos los contraejemplos con n vértices. Primeramente se prueban algunas propiedades estructurales sobre G y a continuación se demuestra que no pueden darse todas a la vez.

Esta cota superior fue posteriormente rebajada a 97 por Kaiser et al. en [47].

Además de este teorema, existen algunos resultados relacionados con los grafos periplanos.

Teorema 48 (Czap [26])

Si G es un grafo periplano bipartito entonces $\chi_p(G) \leq 8$, y además, esta cota es ajustada.

Teorema 49 (Czap [26])

Para todo grafo G periplano 2-conexo se tiene que:

$$\chi_p(G) \leq 12$$

El siguiente teorema, mejora la cota propuesta por Czap en [27] para la coloración en grafos periplanos.

Teorema 50 (Wang et al. [82])

Para todo grafo G periplano 2-conexo, distinto de H_0 y H_1 , se tiene que:

$$\chi_p(G) \leq 9$$

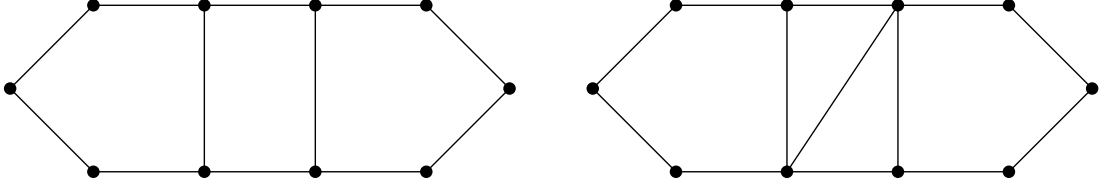


Figura 4.2: Los únicos grafos periplanos 2-conexos con $\chi_p(G) > 9$

A partir de este teorema, obtenemos dos resultados relacionados con el número de vértices de los grafos periplanos y con los grafos bipartitos.

Corolario 51 (Wang et al. [82])

Si G es un grafo periplano 2-conexo distinto de H_0 y H_1 y $|V(G)|$ es par, entonces $\chi_p(G) \leq 8$.

Czap demostró en [26] que la cota superior de 8 para grafos bipartitos es ajustada construyendo un grafo periplano con tres 4-ciclos consecutivos. Por lo que Wang et al. generalizaron ese ejemplo a la clase de grafos \mathfrak{F} . Sea \mathfrak{F} el conjunto de grafo periplanos 2-conexos con exactamente tres caras, con grado divisible por cuatro en cada cara terminal de G y el grado de las caras no terminales sea cuatro.

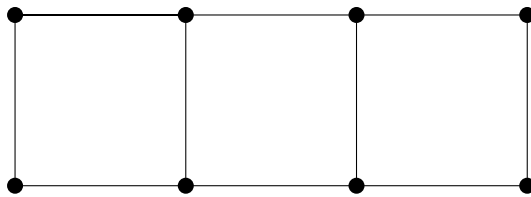


Figura 4.3: Grafo perteneciente a la clase \mathfrak{F} con $\chi_p(G) = 8$

Corolario 52 (Wang et al. [82])

Si G es un grafo periplano bipartito 2-conexo, entonces $\chi_p(G) = 8$ si y solo si $G \in \mathfrak{F}$.

Y para terminar con algunos de los resultados que existen hasta el momento, tenemos una caracterización de los grafos periplanos 2-conexos.

Teorema 53 (Wang et al. [82])

Un grafo outerplanar 2-conexo G tiene $\chi_p(G) = 2$ si y solo si, el grado de cada cara de G es divisible por 2 pero no por 4.

4.1.2. Parity Vertex en triangulaciones

Para este tipo de coloración, nuestro trabajo se ha centrado en las triangulaciones, y más concretamente en los MOP's, para ello hemos encontrado algunos resultados que relacionan el número de ocurrencias de un color con el cardinal de los vértices del grafo.

Debido a que en este tipo de grafos, todas las caras (excepto posiblemente la cara exterior), son triángulos, todos los resultados obtenidos están relacionados con la cara exterior del grafo y su número de vértices.

Proposición 54

Si el número cromático de paridad de un MOP es 3 entonces el número de ocurrencias del color c_x más el número de ocurrencias del color c_y es mayor o igual que el número de ocurrencias del color c_z .

Además, para esta variante de coloración, se han desarrollado dos algoritmos que permiten triangular un MOP con $\chi_p = 3$. El primero de ellos parte únicamente de la terna de ocurrencias de cada color.

Algoritmo 55

Entrada: $L = c_1, c_2, c_3$ de las ocurrencias de los colores.

Salida: Una triangulación del grafo.

Estrategia: Igualamos los cardinales de ocurrencias de cada color al mínimo de ellos.

Dibujamos un grafo cíclico con el número de vértices obtenidos en el paso anterior.

Asignamos los colores 1, 2, 3 en cadena y triangulamos dicho grafo mediante el método de eliminación de orejas.

Añadimos vértices de grado 2 entre dos vértices del grafo con uno de los colores que se suprimieron en el paso 1.

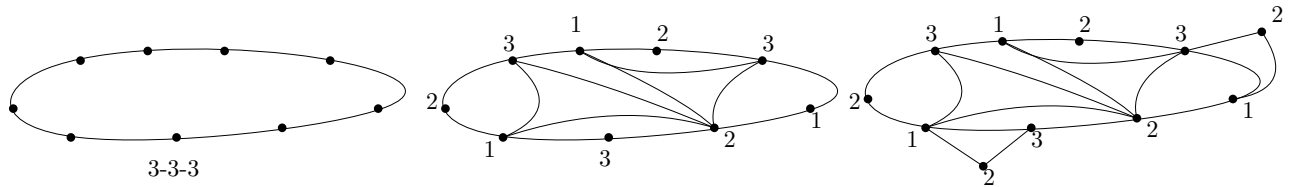


Figura 4.4: Ejemplo del algoritmo con la terna (3-5-3)

El segundo algoritmo parte de la terna de ocurrencias de cada color con los vértices ya colocados en el grafo.

Algoritmo 56

Entrada: $L = c_1, c_2, c_3$ de las ocurrencias de los colores y la disposición de los vértices ya coloreados.

Salida: Una triangulación del grafo.

Estrategia: Eliminamos orejas de forma que el número de ocurrencias de cada color se equilibre.

En el caso de que se llegue a una situación en la que no se pueden cortar orejas:

Si la combinación de colores es $(a, a, a+1)$, recortamos una oreja de manera que pasemos a la situación $(a-1, a, a+1)$.

Recortamos una oreja del tercer color de forma que se pase a la situación $(a-1, a, a)$.

Añadimos un vértice auxiliar, que eliminaremos cuando finalice el proceso, del color 1, de forma que pasemos a la situación (a, a, a) y volveremos al paso 1.

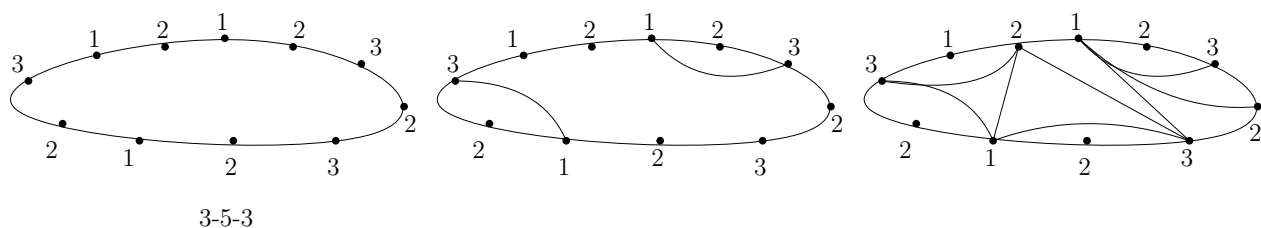


Figura 4.5: Ejemplo del algoritmo con la terna (3-5-3)

Ninguno de estos algoritmos garantizan la unicidad de soluciones, sólo su existencia.

4.2. Sum Coloring

Definición 57 (Sum coloring)

El problema de la sum coloring o coloración suma cromática intenta encontrar una coloración de los vértices de un grafo dado $G = (V, A)$ utilizando los números naturales, de tal forma que la suma total de los colores se minimice, a esta suma total la denotaremos por $\Sigma(G)$. Una coloración que logre esta suma total se denomina coloración óptima y el mínimo número de colores que se necesitan en una coloración óptima de un grafo se denomina fuerza del grafo y se denota por $s(G)$.

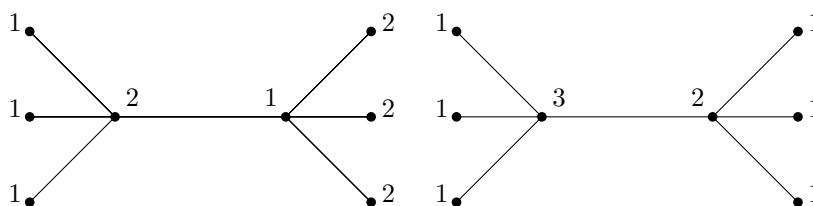


Figura 4.6: Coloración de un árbol con suma total 12 usando 2 colores y coloración con suma total 11 usando 3 colores

La noción de colorear los vértices de un grafo de forma que se minimizase el número de colores que se utilizasen para esa coloración apareció por primera vez en el año 1987 mediante dos publicaciones distintas, una, en la tesis doctoral de Kubika [58]; y la otra, fue propuesta por Supowit en [77]. Algunas de las aplicaciones de esta variante de coloración son la planificación y la asignación de recursos.

4.2.1. Resultados previos

Para esta variante de coloración existen resultados previos como la prueba de la NP-completitud del problema de encontrar $s(G)$ para grafos con $\Delta = 6$, un algoritmo que permite obtener esta suma en tiempo polinómico para cadenas bipartidas y grafos k -split. Y además se han obtenido resultados con esta misma variante para las aristas del grafo en vez de para los vértices, probando que el problema también es NP-completo para grafos k -regulares con $k \geq 3$, y se obtiene un algoritmo polinómico para resolver este problema en árboles. Estos resultados fueron propuestos en [71] por M.R. Salavatipour.

Otro de los resultados previos es de H. Hajiabolhassan et al. en el que se prueba el famoso teorema de Brooks reemplazando $\chi(G)$ por $s(G)$ obteniéndose el siguiente teorema:

Teorema 58 (Hajiabolhassan et al. [36])

Para todo grafo G se tiene que:

$$s(G) \leq \lceil \frac{col(G) + \Delta(G)}{2} \rceil$$

donde $col(G)$ es una invariante basada en la ordenación lineal de los vértices de G .

En caso de que el grafo G sea un árbol, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 59 (Hajiabolhassan et al. [36])

Para todo árbol T con diámetro $d(t)$ se tiene que:

$$s(T) \leq \lceil \frac{\min(d(T), \Delta(T))}{2} \rceil + 1$$

Para árboles, además, existe un algoritmo lineal [59] que halla la suma cromática para un árbol dado y realiza una coloración propia de dicho árbol.

Gracias a estos dos resultados hacen que se plantee la siguiente conjetura:

Conjetura 60 (Hajiabolhassan et al. [36])

Para todo grafo G se tiene que:

$$s(G) \leq \lceil \frac{\chi(G) + \Delta(G)}{2} \rceil$$

El siguiente resultado es un teorema tipo Brooks que involucra al grado máximo de un grafo G , $\Delta(G)$.

Teorema 61 (Mitchem, Morriss [66])

Para todo grafo G , se tiene que:

$$s(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Y además, $s(G) = \Delta(G) + 1$ si y solo si G es un grafo completo o un ciclo impar.

Existe también un algoritmo [57] para grafos unicíclicos de orden lineal, y otro para grafos periplanos de orden cúbico.

Para esta variante de coloración, también existe el parámetro fuerza referido a las aristas del grafo en vez de a los vértices del mismo. Para este parámetro también existen cotas, sin embargo, nuestra tarea ha consistido en la coloración de los vértices del grafo.

Además de existir cotas para el parámetro fuerza del grafo, también existen algunos resultados para el otro parámetro importante en este tipo de coloración, la suma cromática.

Teorema 62 (Thomassen et al. [80])

Para todo grafo G conexo con e aristas, se tiene que:

$$\lceil \sqrt{8e} \rceil \leq \Sigma(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}(e + 1) \rfloor$$

4.2.2. Sum Coloring en triangulaciones

Se han obtenido para este tipo de coloración dos teoremas relacionados con grafos periplanos maximales que pasamos a detallar y otros dos resultados relacionado con grafos planos en el plano y en otras superficies en general que están sin demostrar.

Teorema 63

Todo grafo periplano maximal G sin triángulos interiores se puede 4-colorear con suma cromática mínima, es decir, $s(G) \leq 4$.

Demostración:

Para la demostración de este teorema nos hemos basado en el hecho de que sólo existen dos tipos de grafos con esta característica de no tener triángulos interiores, y son los grafos en forma de zigzag y los grafos que contengan abanicos:

- Los MOP zigzag, se pueden colorear únicamente utilizando 3 colores y obtener suma cromática mínima. Para ello, se colorea el grafo normalmente y a continuación procedemos a intercambiar colores de forma que el color más repetido sea el 1, y el que menos, el 3.
- Los MOP abanico, necesitan 3 ó 4 colores para obtener una suma cromática mínima. Para ello, coloreamos los “centros” de los abanicos con los colores 3 ó 4, dependiendo de si dichos “centros” son adyacentes entre sí o no, y los colores 1 y 2 para los extremos de las varillas.

Por tanto, como mínimo se necesitan 4 colores para colorear los grafos periplanos maximales sin triángulos interiores o grafos serpentinicos, es decir, $s(G) \leq 4$.

Gracias a esta cota para la fuerza del grafo, podemos afirmar también que $\Sigma(G) \leq 2n$, y esta cota se consigue para los grafos zigzag.

□

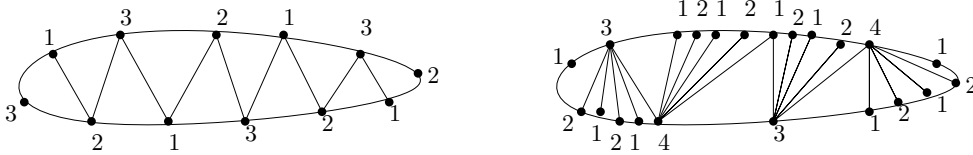


Figura 4.7: Coloración de un zigzag con 3 colores y un abanico con 4

A partir de aquí, nos preguntamos cuál sería la cota para MOP's en general, y encontramos un ejemplo en el que se necesitaban 6 colores para colorearlo con suma cromática mínima.

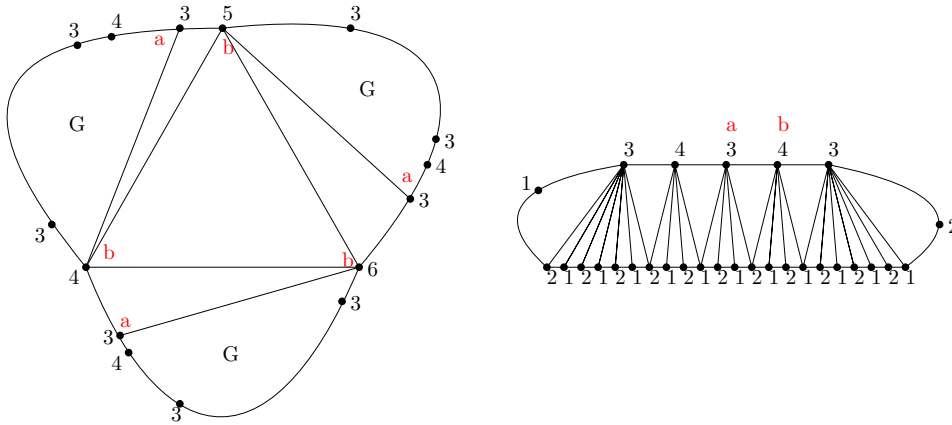


Figura 4.8: Grafo que necesita una 6-coloración y grafo G

Por tanto, intentamos demostrar que esa cota es la máxima posible. Previamente, se han desarrollado dos algoritmos que realizan intercambios de color entre los vértices de un grafo que nos serán útiles para la posterior demostración del teorema.

Algoritmo 64

Entrada: un MOP sum coloreado G_1 , un vértice a y un grafo G_2 sum coloreado.

Salida: Una coloración del grafo.

Estrategia: Si el vértice a tiene el color 1 ó 2 en G_1 , y el contrario en G_2 , como en G_1 existe un camino de 1's y 2's, podemos realizar un intercambio en G_1 entre estos dos colores de forma que al juntar ambos grafos, coincidan los colores de a .

Si el vértice a tiene el color 1 ó 2 en G_1 , y el color 3 ó 4 en G_2 , colocamos en el vértice a de G_1 el color que tenía en G_2 . Si en G_1 había un camino de 3's y 4's adyacente al vértice a , realizamos un intercambio entre los colores de ese camino hasta hacer coincidir colores.

Si el vértice a tiene el color 3 ó 4 en G_1 , y el color 1 ó 2 en G_2 , colocamos en el vértice a de G_1 el color que tenía en G_1 . Si en G_1 o en G_2 había un camino de 3's y 4's adyacente al vértice a , realizamos un intercambio entre los colores de ese camino hasta hacer coincidir colores.

Si el vértice a tiene el color 3 ó 4 en G_1 , y el contrario en G_2 , colocamos en el vértice a de G_1 el color que tenía en G_2 . Si en G_1 había un camino de 3's y 4's adyacente al vértice a , realizamos un intercambio entre los colores de ese camino hasta hacer coincidir colores.

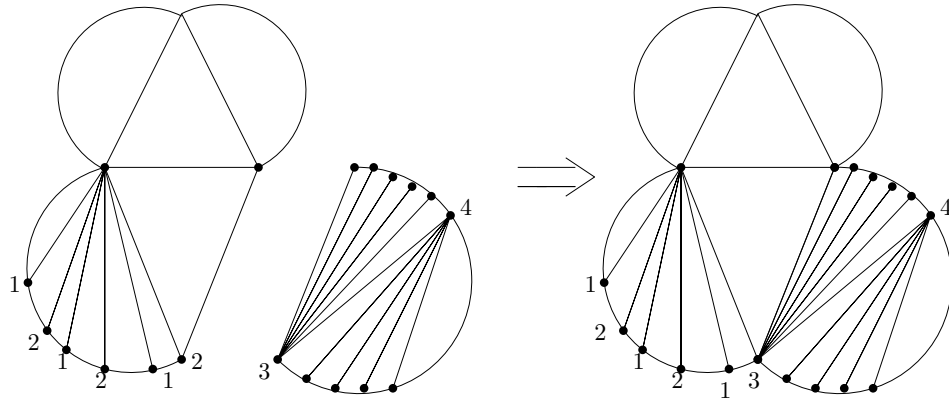


Figura 4.9: Ejemplo del algoritmo

Teorema 65

Todo grafo periplano maximal G se puede 6-colorear con suma cromática mínima, es decir, $s(G) \leq 6$.

Demostración:

La demostración para el teorema se ha realizado mediante inducción sobre el número k de triángulos interiores.

- **Caso básico $k = 0$.** La desigualdad se cumple por el [Teorema 63](#).
- **Hipótesis de inducción.** Supongamos, por tanto, que el resultado es cierto para todo grafo periplano maximal con $k - 1$ triángulos interiores. Si $k \geq 1$, podemos distinguir cuatro casos dependiendo de la posición del nuevo triángulo interior, generado al añadir un nuevo MOP al grafo, respecto al resto del grafo.

Los colores 5 y 6 solo pueden encontrarse en los vértices de los triángulos interiores ya que en el resto solo se necesitan 4 colores para minimizar la suma, luego los siguientes casos están relacionados con las posiciones de esos dos colores con respecto al nuevo triángulo generado.

- **Caso 1:** el nuevo triángulo no es adyacente a ninguno de los otros triángulos interiores del grafo. El subgrafo A es 4-coloreable con suma mínima por no tener triángulos interiores. Y el grafo $G_1 = (G \setminus A) \cup \{e, f\}$ es 6-coloreable por hipótesis de inducción.

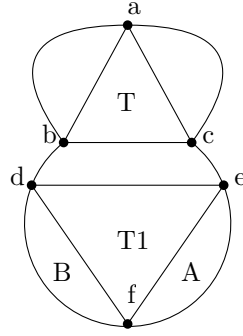


Figura 4.10: El nuevo triángulo $T1$ no es adyacente al resto de triángulos

- **Subcaso 1.1:** los colores 5 y 6 no se encuentran en el triángulo T . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría coloreando los vértices e y f con los colores 5 y 6.
- **Subcaso 1.2:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría coloreando el vértice f con el mismo color que c y e con el otro color, de entre el 5 ó el 6.
- **Subcaso 1.3:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice b . Este caso se resuelve de forma análoga al anterior. Al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría coloreando el vértice f con el mismo color que b y e con el otro color, de entre el 5 ó el 6.
- **Subcaso 1.4:** los colores 5 y 6 se encuentran en los vértices b y c y el vértice b es adyacente al e . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría colocando en el vértice f de A el color 5 y realizando el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 y el vértice e .
- **Subcaso 1.5:** los colores 5 y 6 se encuentran en los vértices b y c y el vértice c es adyacente al d . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se realizaría con la misma operación que en el Subcaso 1.2.

En cualquiera de los casos, una 7-coloración aumentaría la suma cromática.

- **Caso 2:** el nuevo triángulo es adyacente a T por un vértice. El subgrafo A es 4-coloreable con suma mínima por no tener triángulos interiores. Y el grafo $G_1 = (G \setminus A) \cup \{d, e\}$ es 6-coloreable por hipótesis de inducción.

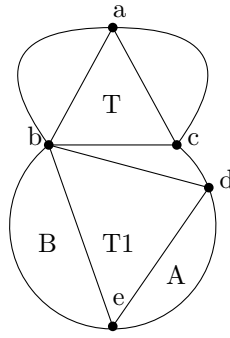


Figura 4.11: El nuevo triángulo $T1$ es adyacente a T por un vértice

- **Subcaso 2.1:** los colores 5 y 6 no se encuentran en el triángulo T . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría colocando en los vértices d y e los colores 5 y 6.
- **Subcaso 2.2:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se conseguiría con el vértice e con el mismo color que c y d con el otro color, de entre el 5 ó el 6.
- **Subcaso 2.3:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice b . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice e con el color, de entre los colores 5 y 6 que no esté en b , y se realiza el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 y el vértice d .
- **Subcaso 2.4:** los colores 5 y 6 se encuentran en los vértices b y c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice e con el color de c y realizando el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 y el vértice d .

En cualquiera de los casos, una 7-coloración aumentaría la suma cromática.

- **Caso 3:** el nuevo triángulo es adyacente a T por un vértice. El subgrafo B es 4-coloreable con suma mínima por no tener triángulos interiores. Y el grafo $G_2 = (G \setminus B) \cup \{b, e\}$ es 6-coloreable por hipótesis de inducción.
 - **Subcaso 3.1:** los colores 5 y 6 no se encuentran en el triángulo T . En este caso, al juntar el subgrafo B con G_2 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice e con el color 5. Y como los colores 1 y 2 no pueden estar en el mismo triángulo que los colores 5 y 6, realizamos el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo B , el grafo G_2 , y el vértice b .
 - **Subcaso 3.2:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice b . En este caso, al juntar el subgrafo B con G_2 , la peor coloración posible se conseguiría con el vértice e con distinto color que b , de entre el 5 ó el 6.

En cualquiera de los casos, una 7-coloración aumentaría la suma cromática.

- **Caso 4:** el nuevo triángulo es adyacente a T por una arista. El subgrafo A es 4-coloreable con suma mínima por no tener triángulos interiores. Y el grafo $G_1 = (G \setminus A) \cup \{c, d\}$ es 6-coloreable por hipótesis de inducción.

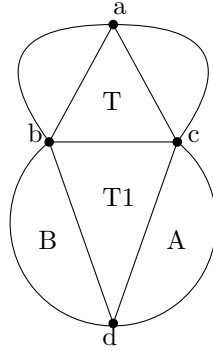


Figura 4.12: El nuevo triángulo $T1$ es adyacente a T por una arista

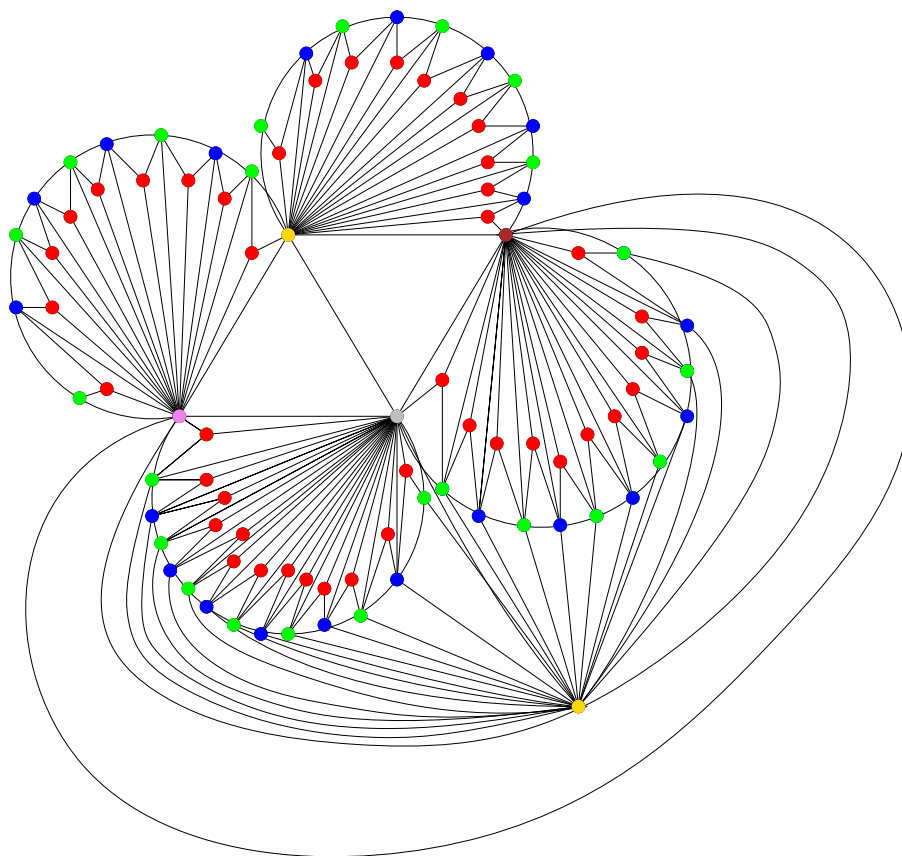
- **Subcaso 4.1:** los colores 5 y 6 no están ni en b ni en c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice d con el color 5. Y como los colores 1 y 2 no pueden estar en el mismo triángulo que los colores 5 y 6, realizamos el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 , y el vértice c .
- **Subcaso 4.2:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice d con el color, de entre 5 y 6, que no esté en c .
- **Subcaso 4.3:** el color 5 ó 6 se encuentra en el vértice b . Este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue coloreando el vértice d con el color, de entre 5 y 6, que no esté en b . Y como los colores 1 y 2 no pueden estar en el mismo triángulo que los colores 5 y 6, realizamos el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 , y el vértice c .
- **Subcaso 4.4:** los colores 5 y 6 se encuentran en los vértices b y c . En este caso, al juntar el subgrafo A con G_1 , la peor coloración posible se consigue realizando el [Algoritmo 64](#) con el subgrafo A , el grafo G_1 y el vértice d .

En cualquiera de los casos, una 7-coloración aumentaría la suma cromática.

Cualquier 7-coloración es peor ya que en todos los casos, el peor intercambio que se produce, es intercambiar el número 1 por el 4, es decir, una diferencia de 3, que es igual que utilizar el color 7 en vez del color 4.

□

Después de encontrar esta cota para grafos periplanos maximales, decidimos aumentar la búsqueda para grafos planos. Para ello, encontramos el siguiente ejemplo que necesita 7 colores para minimizar la suma cromática, el cual, creemos que es el peor ejemplo posible:

Figura 4.13: Grafo plano con $s(G) = 7$

En este ejemplo, la suma cromática óptima se consigue sustituyendo el color rojo por el número 1; el verde, por el 2; el azul, por el 3; el amarillo, por el 4; el rosa, por el 5; el marrón, por el 6; y el gris, por el 7. Este ejemplo creemos que es el peor ejemplo, y por tanto, decidimos proponer el siguiente resultado, que de momento, es una conjetura.

Conjetura 66

Para todo grafo plano G se tiene que:

$$s(G) \leq 7$$

Un resultado similar se ha conjeturado para la coloración de grafos en otro tipo de superficies orientables de género g como en el toro T , que tiene género 1, ya que debido a la aparición del grafo K_7 en el desarrollo lineal de esta figura y por la fórmula que permite hallar el número cromático p de dicha figura en cualquier superficie orientable:

$$p = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

de donde obtenemos que $p(T) = 7$, podemos conseguir que el toro se pueda colorear con 3 colores más, de forma que la suma cromática sea mínima y se utilicen 10 colores.

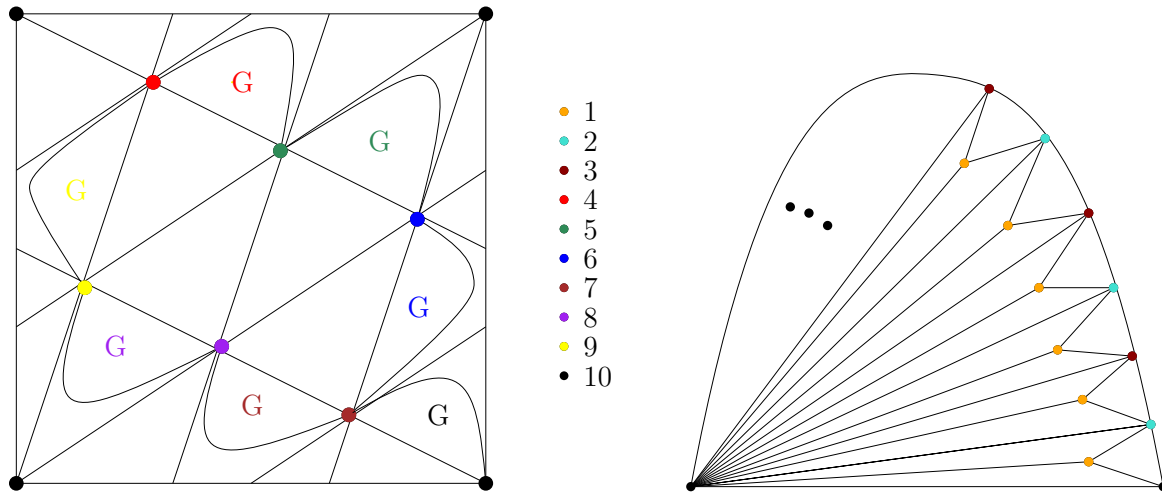


Figura 4.14: Toro y grafo G

Si sustituimos los siete colores del grafo toroidal por los números del 4 al 10, estos colores aparecerían únicamente una vez. Y en el grafo G cambiamos los colores por los números del 1 al 3 de forma que los vértices del exterior sean los números 2 y 3 alternativamente y los vértices del interior de cada K_4 sea el color 1.

Con estos tres resultados sobre la coloración en MOP's, grafos planos y grafos en superficies orientables con género g , nos aventuramos a conjeturar que se cumple la siguiente propiedad:

Conjetura 67

Para toda superficie orientable S , se tiene que si su número cromático es χ_S , podemos encontrar una coloración de un grafo en dicha superficie que utilice $\chi_S + 3$ colores de forma que se minimice la suma cromática.

4.3. Complete coloring

Definición 68 (Complete coloring)

La complete coloring o coloración completa es una coloración propia de los vértices de un grafo $G = (V, A)$ con la propiedad de que para cada par de colores i y j utilizados en la coloración, existen vértices adyacentes en G coloreados con i y j . Una coloración completa en la cual k colores han sido utilizados, se denomina k -coloración completa. El entero positivo más grande para el cual G tiene una k -coloración completa es el número acromático de G , y se denota por $\psi(G)$.

Este concepto fue introducido por Harary et al. en [39]. Se tiene, por tanto, que:

$$\psi(G) \geq \chi(G)$$

para todo grafo G . Además, se puede afirmar también, que si G es un grafo de orden n , entonces $\psi(G) \leq n$.

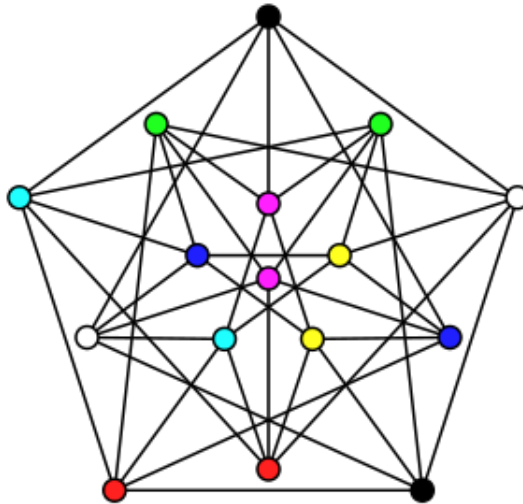


Figura 4.15: Coloración completa del grafo de Glebsch con 8 colores

4.3.1. Resultados previos

Para esta variante de coloración, introduciremos algunas de las cotas que existen para ciertos tipos de grafos, y resultados que existen para todo tipo de grafos, en los que se relaciona el concepto de coloración completa con dos conceptos importantes en teoría de grafos como son los conjuntos independientes y conjuntos recubridores.

Teorema 69

Para todo grafo completo K_n se tiene que:

$$\psi(K_n) = \chi(K_n) = n$$

Teorema 70

Para todo $n \geq 2$, $\psi(P_n) = \max\{k : (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)(k - 2) + 2 \leq n\}$

Teorema 71

Para todo $n \geq 3$, $\psi(C_n) = \max\{k : k(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor) \leq n\} - s(n)$ donde $s(n)$ es el número de soluciones enteras de $n = 2x^2 + x + 1$

Teorema 72

Todo grafo completo bipartito tiene número acromático 2.

Gracias a resultados anteriores, Harary et al., consiguieron demostrar que si el tamaño m de un grafo G satisface la desigualdad $\binom{k}{2} \leq m < \binom{k+1}{2}$ para algún entero positivo k y existe una l -coloración completa de G , entonces $l \leq \psi(G) \leq k$. El siguiente teorema encuentra una cota muy simple para el número acromático de un grafo en términos de su tamaño.

Proposición 73

Si G es un grafo de tamaño m , entonces:

$$\psi(K_n) \leq \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$$

Con la excepción de que $\chi(G) \leq \psi(G)$ para todo grafo G , no existen restricciones sobre los posibles valores de $\chi(G)$ y $\psi(G)$. Pero Vithal y Bhave observaron [9] lo siguiente.

Proposición 74 (Bhave, Vithal [9])

Para cada par de enteros a y b con $2 \leq a \leq b$, existe un grafo G con $\chi(G) = a$ y $\psi(G) = b$.

Debido a que este teorema sólo demuestra que el número $\psi(G) - \chi(G)$ puede ser arbitrariamente grande para un cierto grafo, Xu, estableció una cota superior para este valor en términos del orden de G .

Proposición 75 (Xu [86])

Para todo grafo G de orden $n \geq 2$,

$$\psi(K_n) - \chi(G) \leq \frac{n}{2} - 1$$

Un conjunto de vértices (o aristas) S es independiente si ningún vértice (o arista) de S es adyacente. El número de independencia para vértices $\alpha_0(G)$ es el mayor número de vértices en un conjunto independiente, análogamente, el número de independencia para aristas $\alpha_1(G)$ es el mayor número de aristas en un conjunto independiente.

Un vértice y una arista se cubren entre sí, si son adyacentes. El número de recubrimiento para vértices $\beta_0(G)$ es el menor número de vértices que cubren las aristas de G , análogamente, el número de recubrimiento para aristas $\beta_1(G)$ es el menor número de aristas que cubren los vértices de G .

Una cota superior para $\psi(G)$ se obtiene fácilmente en términos del número de vértices y el número de independencia para vértices de un grafo G . Este resultado, combinado con un resultado de Gallai [37], que relaciona n y $\alpha_0(G)$ con los otros tres elementos $\beta_0(G)$, $\alpha_1(G)$ y $\beta_1(G)$, sugiere algunas cotas para $\psi(G)$.

Proposición 76 (Gallai [37])

Para todo grafo G de orden n ,

$$\beta_0 + \alpha_0 = n = \beta_1 + \alpha_1$$

Proposición 77 (Harary et al. [39])

Para todo grafo G de orden n ,

$$\psi(G) \leq n - \alpha_0 + 1$$

Combinando estos dos resultados, se obtiene la siguiente cota superior:

Corolario 78 (Harary [38])

Para todo grafo G de orden n ,

$$\psi(G) \leq \beta_0 + 1$$

Proposición 79

Para todo grafo G de orden n ,

$$\begin{aligned} \psi(G) &\leq 2\alpha_1 + 1 \\ \psi(G) &\leq 2\beta_1 \end{aligned}$$

4.3.2. Complete coloring en triangulaciones

Para este tipo de coloración, sobre todo nos hemos centrado en MOP's de la forma zigzag.

Teorema 80

Para todo grafo periplano maximal G , se tiene que

$$\begin{aligned} n &\geq \lceil \frac{1}{4}(\psi(G)^2 - \psi(G) + 6) \rceil \\ \psi(G) &\leq \lfloor \frac{1 + \sqrt{16n - 23}}{2} \rfloor \end{aligned}$$

Demostración:

En una k -coloración total, se necesitan $\binom{k}{2}$ aristas, y en un grafo periplano maximal, se tiene que el número de aristas es a lo sumo $2n - 3$, luego:

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \leq 2n - 3$$

Despejando de la inecuación, en primer lugar n , y en segundo lugar k , se obtienen las dos cotas para ambas variables.

□

A continuación, se detalla un algoritmo constructivo para colorear los vértices de un MOP de la forma zigzag a partir de una k -coloración completa, dado el número k .

Algoritmo 81

Entrada: un MOP zigzag, un entero k .

Salida: Una k -coloración completa del grafo.

Estrategia: Partimos de un MOP triangulado en forma zigzag.

Se colorea el MOP por la izquierda con los colores 1, 2 y 3.

Se coloca el color 4 en la siguiente posición libre siguiendo el zigzag. Y entre sus vecinos, colocamos los colores que faltan para completar la 4-coloración completa.

Una vez que se tiene una $(k-1)$ -coloración completa, escogemos el color k y lo colocamos en la siguiente posición del zigzag. Rellenamos sus vecinos. Si hemos completado la k -coloración completa, hemos terminado. En caso contrario, si quedan una o dos parejas de colores, colocamos el color k en la siguiente posición libre; si quedan tres parejas, dejamos 1 posición libre; en caso contrario, dejamos 2 posiciones libres de color, y en la 3ª, colocamos el color k de nuevo, coloreando sus vecinos correspondientes.

Se realiza este paso hasta haber completado la k -coloración completa.

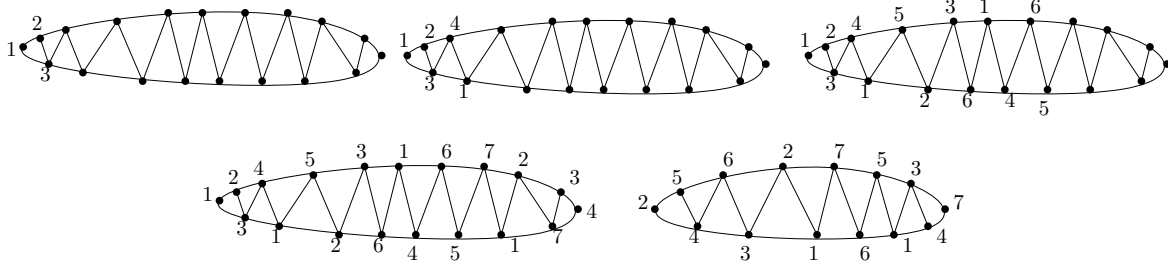


Figura 4.16: Ejemplo del algoritmo con $k = 7$ y 7-coloración completa

4.4. Rainbow coloring

Definición 82 (Rainbow coloring)

Una coloración de las aristas de un camino de un grafo se dice que es irisada o rainbow si ningún color se repite en él. Un grafo se denomina rainbow-connected si existe un camino irisado entre cada par de vértices. El número de conexión irisado o rainbow connection number de un grafo es el mínimo número de colores que se necesitan para hacer rainbow-connected el grafo G , y se denomina $rc(G)$.

El concepto de rainbow coloring tiene múltiples variantes, una de las cuales fue introducida por Krivelevich y Yuster en [54], en la que se tienen en cuenta los vértices del camino irisado. Sea $c' : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una k -coloración de los vértices de G para un cierto natural k . Un camino P en G con una k -coloración de sus vértices se denomina irisado para los vértices si todos los vértices internos de P tienen un color distinto. El grafo G se denominará, por tanto, rainbow vertex-connected si para cada par de vértices

u y v de $V(G)$ existe un camino irisado. El número irisado para vértices de un grafo G , denotado por $rvc(G)$ es el mínimo entero positivo k para el cual G es irisado vértice-conexo bajo la coloración c' .

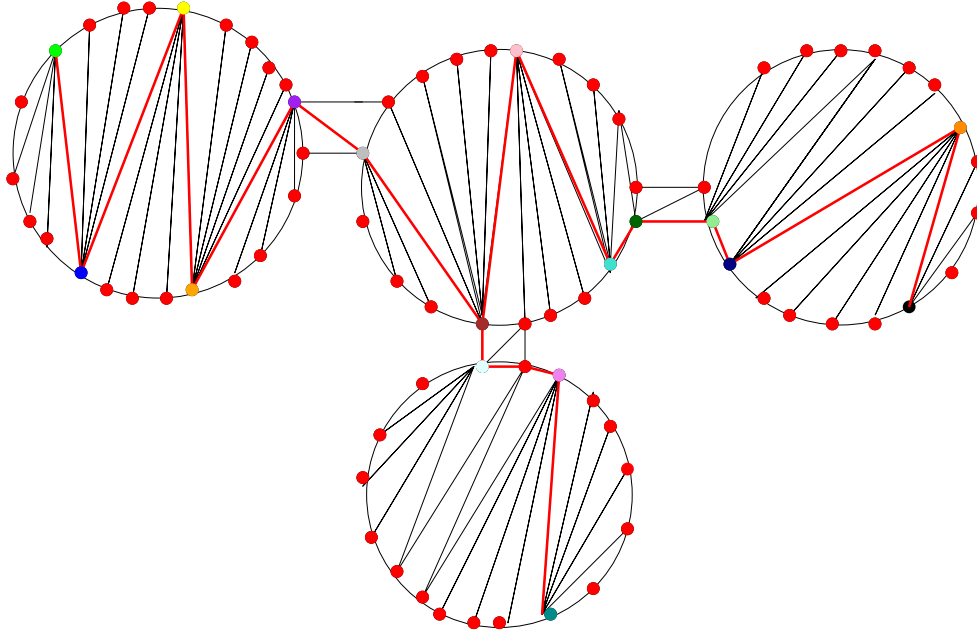


Figura 4.17: Grafo periplano maximal $rvc(G) = 18$

4.4.1. Resultados previos

Krivelevich y Yuster en [54] establecieron la cota inferior para rvc :

$$rvc(G) \geq \text{diam}(G) - 1 \quad (4.1)$$

Proposición 83 (Fujie-Okamoto et al. [31])

Para todo grafo conexo G de orden $n \geq 2$:

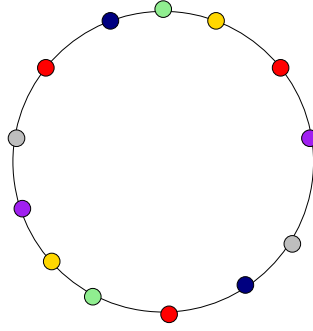
$$2 \leq rvc(G) \leq n$$

Existen resultados interesantes para el número de coloración irisada. Algunos de ellos han sido propuestos por Li y Liu en [62], o por Sinamora y Salman en [74].

Teorema 84 (Li, Liu [62])

Sea C_n un ciclo de orden $n \geq 3$, entonces:

$$rvc(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 5 \\ 3 & \text{si } n = 9 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 & \text{si } n = 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 \text{ ó } 15 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{si } n = 14 \text{ ó } n \geq 16 \end{cases}$$

Figura 4.18: Ciclo de orden 13 con $rvc(G) = 6$

Gracias a este teorema, además, se consiguió demostrar el siguiente resultado, que es válido para cualquier grafo 2-conexo.

Teorema 85 (*Li, Liu [62]*)

Sea G un grafo 2-conexo de orden $n \geq 3$. Entonces:

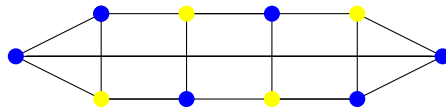
$$rvc(G) \leq rvc(C_n)$$

Otro tipo de grafos para los que se conoce una cota para este tipo de coloración son los grafos lapiceros:

Teorema 86 (*Sinamora, Salman [62]*)

Sea n un entero $n \geq 2$. Entonces:

$$rvc(P_{C_n}) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{si } n \leq 7 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Figura 4.19: Coloración irisada de P_{C_4} con $rcv(G) = 2$

En la siguiente tabla se muestran algunos de los resultados que existen para rvc para grafos especiales:

K_n	1
P_n	$n - 2$
$K_{n,m}$	1
T	$n - h$
Unicíclicos	$\lceil \frac{n+k-h}{2} \rceil + \delta - 1$
S_n	1
W_n	1

donde h es el número de hojas del grafo, k el número de vértices corte y $\delta \in \{0, 1\}$ es un parámetro que toma el valor 0 si y solo si el grafo es un ciclo de orden n o el grafo inducido por el conjunto de vértices que no son ni vértices corte ni hojas es isomorfo a un camino de longitud impar.

En general, se tiene el siguiente teorema que relaciona el número de vértices del grafo con el grado mínimo de sus vértices.

Teorema 87 (*Krivelevich, Yuster [54]*)

Para todo grafo G conexo con n vértices, se tiene que $rvc(G) \leq \frac{11n}{\delta(G)}$.

Existe otro resultado previo, que relaciona el número de coloración irisada con el parámetro clique $\omega(G)$ de un grafo G , es decir, el orden del mayor subgrafo completo de G .

Teorema 88 (*Fujie-Okamoto et al. [31]*)

Si G es un grafo 2-conexo de orden $n \geq 4$ entonces $rvc(G) = n - 1$ si y solo si $\omega(G) = n - 1$.

4.4.2. Rainbow coloring en triangulaciones

Para esta variante de coloración, primeramente, nos centramos en encontrar una cota superior que mejorase los resultados existentes. Y esta cota la conseguimos demostrar con la introducción de un parámetro muy estudiado en teoría de grafos como es el de dominación, y particularmente, el de dominación conexas de un grafo.

Teorema 89

Para todo grafo G conexo, se tiene que:

$$rvc(G) \leq \gamma_c(G)$$

Demostración:

Sea $S(G)$ el conjunto dominante conexas del grafo G . Por definición, S es un conjunto adyacente a todos los vértices de G , y por tanto, siempre existe un camino que conecta un par cualquiera de vértices de G que sólo pasa por dicho conjunto y por tanto, si $|S(G)| = \gamma_c$, entonces, $rvc(G) \leq \gamma_c$.

Es decir, encontramos el conjunto de vértices de S y se colorean con γ_c colores, y el resto de vértices, por ser adyacentes a los anteriores, se colorean del mismo color, repitiendo uno de los utilizados en S .

□

A partir de este resultado para cualquier tipo de grafos, nos dedicamos a mejorarlo, centrándonos en tipos concretos de grafos como son los periplanos maximales.

Teorema 90

Para todo grafo periplano maximal G de orden n , camino diametral P y sin triángulos separadores, se tiene que:

$$rvc(G) = \gamma_c(G) = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \text{long}(P) - 1$$

Demostración:

Por el resultado (4.1), se tiene que $rvc(G) \geq \text{long}(P) - 1$ para cualquier tipo de grafo, y en particular, para los grafos periplanos sin triángulos separadores.

Además, por el Teorema 89, se tiene que $rvc(G) \leq \gamma_c(G)$ para cualquier tipo de grafo, y en particular, también para los grafos periplanos sin triángulos separadores.

La igualdad $\gamma_c(G) = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ está demostrada por Hernández en [44].

Así, sólo quedaría demostrar que en un grafo periplano maximal $\gamma_c(G) = \text{long}(P) - 1$, que es cierto ya que el camino diametral en un grafo periplano maximal sin triángulos interiores o separadores se encuentra entre los vértices de grado 2 del grafo, y entre ellos hay $\text{long}(P) - 1$ vértices, es decir, los mismos que en $\gamma_c(G)$ por pasar por los centros de los abanicos del grafo o los vértices de $\gamma_c(G)$.

□

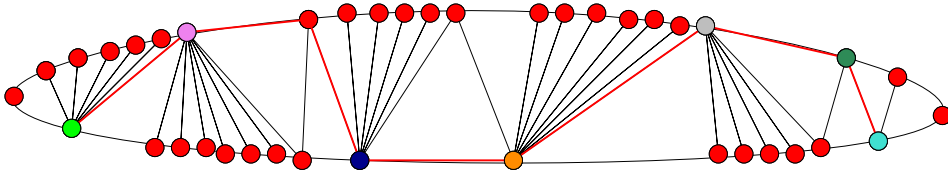


Figura 4.20: Coloración irisada de un grafo sin triángulos separadores con $rvc(G) = \gamma_c(G) = 8$

Otro de los resultados que se encontraron para esta coloración, fue el siguiente, que relaciona nuestro parámetro rvc , con el concepto de dominación conexa, y con el de cobertura conexa.

Teorema 91

Para todo grafo periplano maximal G se tiene que:

$$rvc(G) \leq |S \cup B|$$

donde $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ y S_i es el conjunto dominante conexo de cada subgrafo H_i generado por los triángulos de G que no son interiores y $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$ y B_j es el conjunto recubridor conexo de cada subgrafo B_j generado por los triángulos interiores de G .

Demostración:

Por el Teorema 90, se tiene que $rv(G) = \gamma_c(G)$. Además, para poder realizar los caminos entre cada H_i , necesitamos el parámetro β_c de cada uno de los subgrafos I_j . Y por último, necesitamos quitar una vez los vértices que pertenecen a la intersección de ambos conjuntos, por tanto, $rv(G) \leq |S(H_i)| + |B(I_j)| + |S(H_i) \cap B(I_j)| = |S \cup B|$.

□

4.5. Resumen resultados obtenidos sobre coloración

GRAFOS	Parity Vertex	Sum Coloring	Complete Coloring	Rainbow Coloring
MOP's sin triángulos separadores		$s(T) \leq 4$		$vr c(T) = \gamma_c(T)$
MOP's		$s(H) \leq 6$		$vr c(H) \leq \gamma_c(H) \cup \beta_c(I) $
Planos		$s(G) \leq 7$ ¹		$vr c(G) \leq \gamma_c(G)$
Superficie S		$s(G) \leq \chi(S) + 3$ ¹		

Cuadro 4.1: Tabla resultados obtenidos

1

¹resultados sin demostrar

Capítulo 5

NP-completitud

5.1. Introducción

La complejidad de un algoritmo mide la eficiencia del algoritmo en la resolución del problema. Se mide en tiempo (número de operaciones realizadas) o en espacio o cantidad de memoria utilizada. Otra manera de medir la complejidad del algoritmo es en el peor de los casos o en media.

Los algoritmos se suelen dividir en dos grupos dependiendo de su decidibilidad:

- Problemas indecidibles: Si no existe ningún algoritmo que lo resuelva.
- Problemas decidibles: Si existen algoritmos que los resuelven.
 - Clase P: problemas resolubles en tiempo polinómico.
Existe un algoritmo de complejidad polinómica $O(n^k)$ que resuelve el problema, donde k es una constante y n es el tamaño de la entrada del problema.
 - Clase NP: Problemas verificables en tiempo polinómico.
Dado un “certificado” (una posible solución), podemos verificar si es correcto en tiempo polinómico en el tamaño del problema.

En nuestro caso, la 3-coloración de grafos planos, está en la clase NP como ya demostró Stockmayer, ya que dada una instancia I del problema, es decir, un grafo G , un certificado $C(I)$ es una asignación de colores a los vértices.

$$V(G) = \{1, 2, 3\}$$

que podemos comprobar si es una 3-coloración válida en tiempo $O(n^2)$ mirando los extremos de cada arista.

5.2. Transformación de problemas

El problema A es polinómicamente reducible a B si existe T , algoritmo polinómico, que convierte cada instancia I de A en una instancia $T(I)$ para el problema B tal que:

$$\text{La respuesta a } I \text{ es SÍ} \iff \text{La respuesta a } T(I) \text{ es SÍ}$$

La notación es $A \propto B$.

5.3. Problemas NP-duros y NP-completos

Un problema Π es NP-duro si cualquier problema de la clase NP puede transformarse polinómicamente a Π .

Es decir, si resolviendo Π se pueden resolver todos los problemas de la clase NP.

Un problema Π es NP-completo si es NP-duro y está en la clase NP.

Para demostrar que dado un problema Q , es NP-completo, primeramente, hay que demostrar que está en la clase NP. Esta tarea es la más sencilla ya que sólo hay que verificar si un certificado dado, es correcto en tiempo polinómico en el tamaño del problema. A continuación se debe elegir un problema Q' que sea NP-completo. Y por último, deberemos demostrar que $Q' \propto Q$.

En su artículo de 1972 [49], Richard Karp, demostró utilizando esta estrategia que muchos de los problemas eran NP-completos. En nuestro caso, nos ocuparemos de la demostración que hizo L. Stockmayer [32] para demostrar que la 3-coloración de grafos planos es NP-completo. Para ello se basó en la demostración que realizó Stephen Cook sobre la NP-completitud de la 3-coloración a partir del problema 3-SAT [24].

5.4. 3-SAT

Teorema 92 (Cook [24])

El Problema de satisfacibilidad booleana (SAT) es NP-completo.

El teorema fue demostrado independientemente por Leonid Levin aproximadamente en la misma fecha, por lo que algunas veces es llamado Teorema de Cook-Levin [60].

Dado un circuito C o expresión booleana, ¿existe una asignación de valores 0, 1 a las variables de modo que la respuesta de C sea 1?

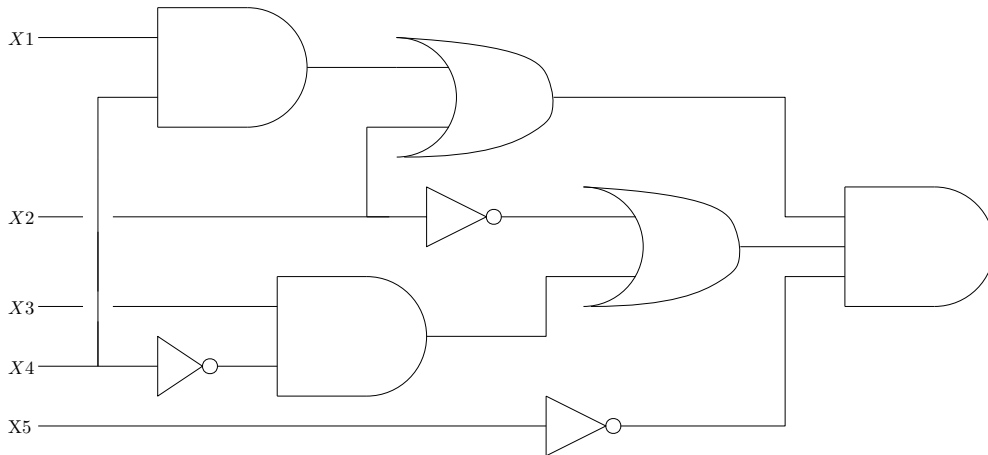


Figura 5.1: Circuito C

$$C = (x_1x_4 + x_2)(x'_2 + x_3x'_4)x'_5$$

Una asignación de valores a las variables es una aplicación

$$f : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

y esto es un certificado para el circuito C . Comprobar que la asignación satisface el circuito es fácil, basta calcular todas las operaciones indicadas en el circuito o expresión booleana. Se puede hacer en tiempo polinómico.

Si $x_1, x_4 = 1, x_2, x_3, x_5 = 0$ entonces $C = 1$.

El problema del SAT, es usado como punto de inicio para probar que otros problemas son también NP-duros. Entre estos problemas, se encuentra el de 3-SAT, que fue demostrado que es NP-completo por Karp en 1972.

Dada una expresión booleana E en forma normal conjuntiva con tres literales por cláusula ¿existe una asignación de valores 0, 1 a las variables de modo que la respuesta de E sea 1?

$$E = (x_1 + x_4 + x_2)(x'_2 + x_3 + x'_4)(x'_2 + x_3 + x_5)$$

Gracias a esta expresión booleana Karp demostró que $SAT \propto 3 - SAT$

5.5. 3-Coloración

El teorema de Brooks implica que la 3-coloración de un grafo con grado máximo de los vértices 3, puede determinarse en tiempo polinómico. Como este teorema se puede aplicar a todos los grafos, no planares al igual que planares, ¿no se podría esperar que con la condición adicional de planaridad, se obtendría un resultado mas fuerte? Los malos resultados fueron producidos por Stockmayer en [76] y por Michael Garey, David Johnson y Stockmayer en [32].

Teorema 93

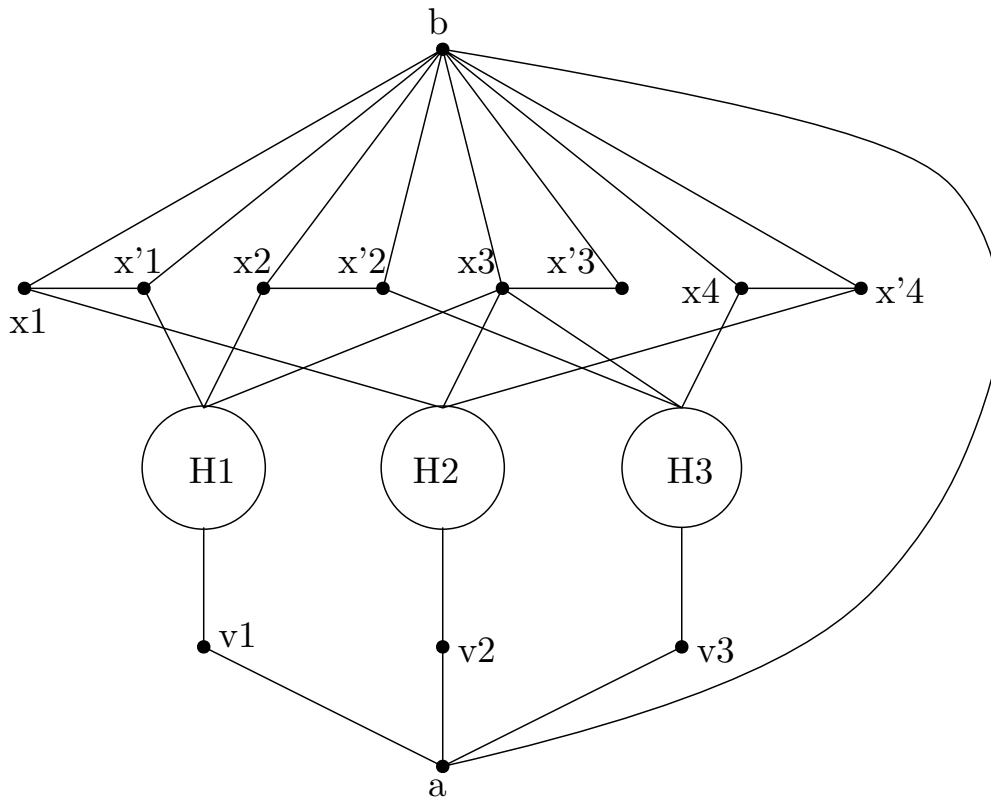
- 3-coloración es NP-completo.
- 3-coloración de grafos planos es NP-completo.

Demostración:

- Consideraremos una instancia de 3-SAT, que es una expresión booleana E , y a partir de ella construimos un grafo G tal que se cumpla:

$$E \text{ se satisface} \iff G \text{ es 3-coloreable}$$

Dada la expresión booleana $E = (x_1 + x_4 + x_2)(x'_2 + x_3 + x'_4)(x'_2 + x_3 + x_5)$, se tiene:



donde las piezas H_i pueden ser de dos formas. O bien a, b, c se colorean con el color 0, y por tanto el vértice v tiene necesariamente también el color 0; o bien, algunos de los vértices a, b, c tienen el color 1 ó 2, y por tanto se puede colorear el vértice v con el color 1 ó 2.

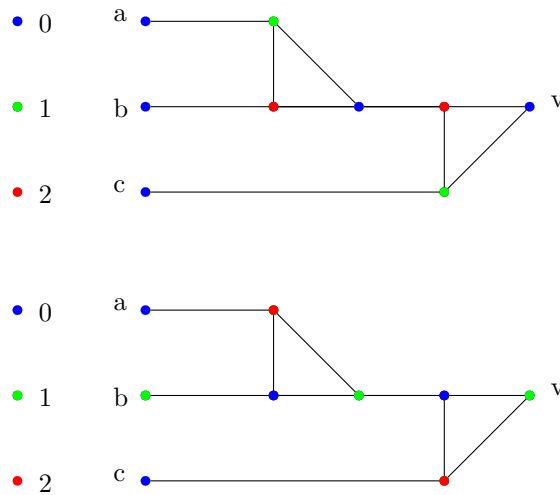


Figura 5.2: Piezas H_i

Si E se satisface con una asignación T de valores 0, 1, coloreamos el grafo G de la siguiente forma:

- Si $x_i = 1$ (verdad) $\Rightarrow x_1$ se colorea con el color 1 y x'_i se colorea con el color 0.
- Si $x_i = 0$ (falso) $\Rightarrow x_1$ se colorea con el color 0 y x'_i se colorea con el color 1.

Como la asignación T satisface la expresión E , algún literal de cada H_k no puede tener el color 0, luego cada uno de los vértices v_k o bien tiene color 1 o color 2. Coloreamos el vértice a con el color 0 y b con el color 2 y tendremos una 3-coloración de G .

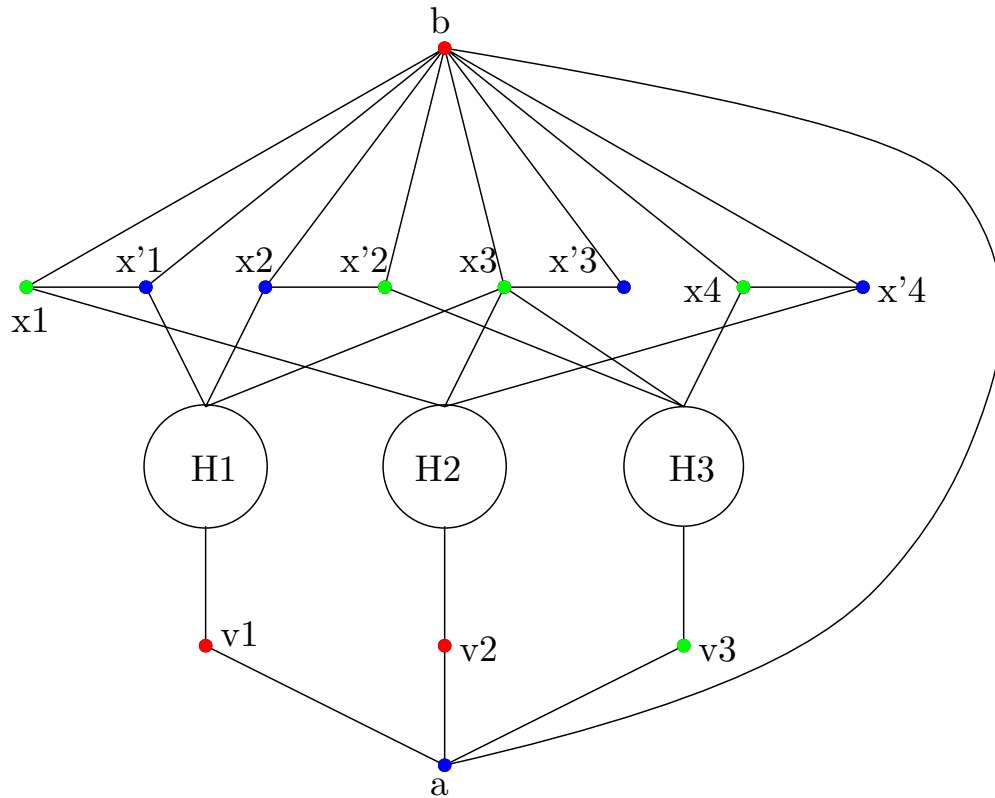


Figura 5.3: 3-coloración G a partir de E

Con esto queda demostrada la primera parte del teorema. Si E se satisface para una asignación 0, 1, entonces tenemos una 3-coloración de G .

Para la otra parte de la demostración, es decir, para demostrar que dada una 3-coloración de un grafo G , E se satisface para una asignación 0, 1, tenemos que para el grafo coloreado de la Figura 4.3, renombrando los colores podemos suponer que a es el color 0 y b es el color 2. De esta forma, cada variable tiene un literal con 0 y otro con 1. Construimos una asignación T de verdad (valores 0, 1), de forma que si y solo si x_j es verdad (toma el valor 1), recibe el color 1. Los vértices v de las piezas H no tienen color 0, luego cada producto (clausula de E) debe tener un literal de color 1, es decir, cada producto toma valor 1 y por tanto, la expresión E toma el valor 1 (se satisface) para la asignación de 0, 1 realizada.

- Para la demostración de que el problema de la 3-coloración de grafos planos es NP-completo, Stockmayer consideró en 1976 una instancia de la 3-coloración, es decir, un grafo G y construyó a partir de ella un grafo G' plano tal que:

$$G \text{ es 3-coloreable} \iff G' \text{ es 3-coloreable.}$$

La 3-coloración se reduce a la 3-coloración de grafos planares con una modificación en la que, para cada coloración propia en el plano de un grafo G no planar, se puede obtener un grafo G' planar reemplazando cada cruce de aristas por copias del grafo H denominado *crossover*:

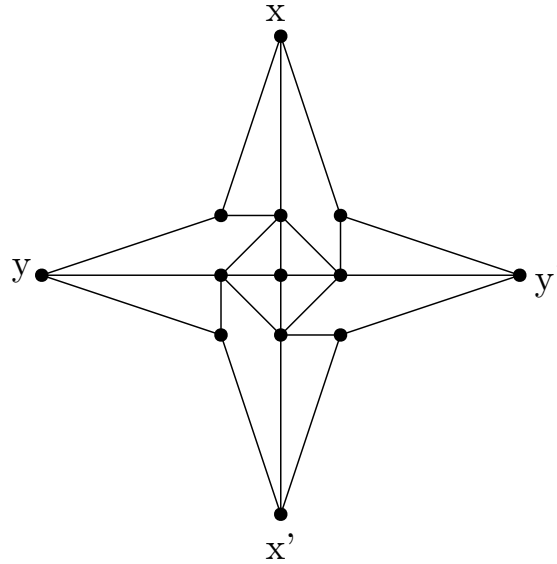


Figura 5.4: H , un crossover

Este grafo tiene las siguientes dos propiedades:

1. Toda 3-coloración de H asigna a x' el mismo color que a x y asigna a y' el mismo color que a y . Si suponemos que x y x' tienen los colores 1 y 2, obtenemos una contradicción ya que el vértice central se colorea con los colores 1 o 3.
2. Toda 3-coloración de x, x', y y y' se puede extender a una 3-coloración de H .

Este crossover H fue propuesto por M.J. Fisher y es más simple que el que usó Stockmayer en su prueba original. La construcción se realiza reemplazando una copia del crossover en cada cruce de aristas como se muestra en la Figura 4.5 para el caso de una arista (u, v) que se cruza dos veces con otras aristas.



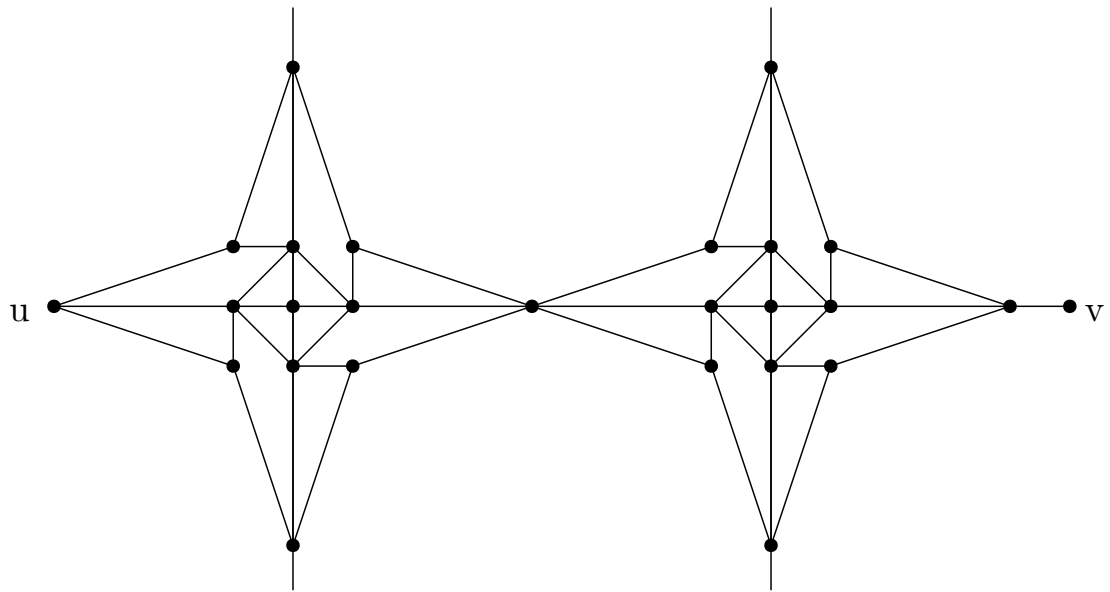


Figura 5.5: Uso del crossover

La equivalencia entre la 3-coloración de G (la primera figura) y la de G' (segunda figura) es sencilla, como lo es a cualquier número de cruces.

Conclusión

Como se ha podido comprobar en este trabajo, la coloración es un concepto que no está cerrado. A parte de estas variantes mencionadas y los pequeños resultados que se han obtenido, existen muchas y variados tipos de coloración en los que se pueden incluir diversas restricciones y características.

Sin embargo, nuestro trabajo ha consistido en una introducción a algunas de estas variantes de coloración en las que hemos atendido a parámetros tan distintos como el número de veces que un colora aparecía en una cara, el número de colores (o números) que se utilizaba en un grafo para minimizar la suma de estos colores, la aparición de todas las parejas de colores en un grafo, o la existencia de caminos con vértices de un color distinto cada uno.

Además, los resultados obtenidos, a pesar de ser interesantes, sólo se han conseguido demostrar para un cierto tipo de grafos, como son los periplanos maximales, grafos interesantes por su sencillez, pero también existen más grafos, y es aquí donde se encuentran más dificultades a la hora de encontrar una demostración a las muchas conjeturas que aparecen durante el estudio de las diferentes variantes.

También me gustaría señalar lo mucho que me ha gustado trabajar en este proyecto ya que me ha permitido aumentar mis conocimientos sobre un tema interesante en el campo de las matemáticas como es la Teoría de Grafos, y a la vez, introducirme en cierta forma, en el campo de la investigación. Gracias a lo cual, se pone a la vista, lo que se ha aprendido durante los cuatro años de estudio.

Y por último, terminar diciendo que durante estos meses de trabajo también hemos tenido la oportunidad de trabajar mano a mano con investigadores de otras universidades durante un seminario realizado en la ciudad de Valladolid. Allí, pudimos presentar algunos de los resultados más interesantes de este trabajo de una forma más profesional que académica.

Bibliografía

- [1] H.L. Abbott, B. Zhou, *On small faces in 4-critical graphs*, Ars Combin. **32** (1991) 203–207.
- [2] , W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Teubner, Leipzig (1901).
- [3] V.A. Aksenov, *Chromatic connected vertices in planar graphs*, Diskret. Analiz **31** (1977) 5–16 (in Russian).
- [4] V.A. Aksenov, *On a extension of a 3-coloring on planar graphs*, Diskret. Analiz Vyp, **26** (1974) 3–19 (in Russian)
- [5] V.A. Aksenov, O.V. Borodin, A.N. Glebov, *On the continuation of a 3-coloring from two vertices in a plane graph without 3-cycles*, Diskretn. Anal. Issled. Oper. **9** (1) (2002) 3–26 (in Russian).
- [6] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable, I, discharging*, Illinois J. Math. **21** (1977) 429–490.
- [7] S. Arnborg, D. Corneil, A. Proskurowski, *Complexity of Finding Embeddings in a k -Tree*, SIAM J. of Algebraic and Discrete Methods, **8** (1987) 277–284
- [8] F.R. Bernhart, *A three and five color theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, **52** (1975) 493–498
- [9] V.N. Bhave, *On the pseudoachromatic number of a graph*, Fund. Math, **102** (1979) 159–164
- [10] O.V. Borodin, *Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings*, J. Graph Theory **21** (2) (1996) 183–186
- [11] O.V. Borodin, A.N. Glebov, *Planar graphs without 5-cycles and with minimal distance between triangles at least 2 are 3-colourable*, J. Graph Theory **66** (1) (2011) 1–31
- [12] O.V. Borodin, A.N. Glebov, T.R. Jensen, *A step towards the strong version of Havel’s 3 Color Conjecture*, J. Combin. Theory, Ser. B. **102** (2012) 1295–1320
- [13] O.V. Borodin, A.N. Glebov, T.R. Jensen, A. Raspaud, *Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 3 to 9 are 3-colorable*, Sib. Elektron. Mat. Izv. **3** (2006), 428–440
- [14] O.V. Borodin, A.N. Glebov, M. Montassier, A. Raspaud, *Planar graphs without 5- and 7-cycles and without adjacent triangles are 3-colorable*, J. Combin. Theory Ser. B **99** (2009) 668–673

- [15] O.V. Borodin, A.N. Glebov, A. Raspaud, *Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable*, Thomassen's special issue of Discrete Math. **310** (2) (2010) 2584–2594
- [16] O.V. Borodin, A.N. Glebov, A. Raspaud, M.R. Salavatipour, *Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable*, J. Combin. Theory Ser. B **93** (2005) 303–311
- [17] O.V. Borodin, A. Raspaud, *A sufficient condition for planar graphs to be 3-colorable*, J. Combin. Theory Ser. B **88** (2003) 17–27
- [18] R.L. Brooks *On colouring the nodes of a network*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **37** (1941) 194–197
- [19] D.P. Bunde, K. Milans, D.B. West, H. Wu *Optimal strong parity edge-coloring of complete graphs*, Combinatorica, **28** (6) (2008) 625–632
- [20] J. Cardinal, V. Ravelomanana, M. Valencia-Pabon, *Minimum Sum Edge Colorings of Multicycles* Discrete Appl. Math. **158** (2010) 1216–1233
- [21] A. Cayley, *On the colouring of maps*, Proceedings of the Royal Geographical Society (New Series), **1** (1879) 259–261
- [22] C. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, *Graphs & Digraphs* sixth edition, CRC Press (2015)
- [23] V. Cohen-Addad, M. Hebdige, D. Král, Z. Li, E. Salgado, *Steinberg's Conjecture is false*, J. Combin. Theory Ser. B.
- [24] S.A. Cook, *The Complexity of Theorem Proving Procedures*, STOC '71 Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, (1971), 151–158.
- [25] R.J. Cook, *Chromatic number and girth*, Periodica Mathematica Hungarica, **6** (1975) 103–107
- [26] J. Czap, *Parity vertex coloring of outerplane graphs*, Discrete Math. **311** (2011) 2570–2573
- [27] J. Czap, S. Jendroľ, M. Voigt, *Parity vertex colouring of plane graphs*, Discrete Math. **311** (2011) 512–520
- [28] Z. Dvořák, D. Král, R. Thomas, *Coloring planar graphs with triangles far apart*, <http://people.math.gatech.edu/thomas/PAP/havel.pdf>.
- [29] P. Erdős, *informal discussion during the conference “Quo Vadis, Graph Theory?”*, University of Alaska, (1990)
- [30] P. Franklin, *The four colour problem*, Amer. J. Math. **44** (1922) 225–236
- [31] F. Fujie-Okamoto, K. Kolasinski, J. Lin, P. Zhang, *Vertex Rainbow Colorings of Graphs*, Discussiones Mathematicae, Graph Theory **32** (2012) 63–80

- [32] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, *Some simplified NP-complete problems*, Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, (1974) 47–63
- [33] L.I. Golovina, I.M. Yaglom, *Induction in Geometry* (translated and adapted from the 2nd Russian edition by A.W. Goodman, and O.A. Titelbaum), (D.C. Heath & Co., 1963)
- [34] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe **8** (1959) 109–120
- [35] B. Grünbaum, *Grötzsch's theorem on 3-colorings*, Michigan Math. J. **10** (1963) 303–310
- [36] H. Hajiabolhassan, M.L. Mehrebadi, R. Tusserkani, *Minimal coloring and strength of graphs*, Discrete Math. **215** (2000) 265–270
- [37] F. Harary, *Maximum-Minimum Sätze und verallgemeinerte*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 131–173
- [38] F. Harary, S.T. Hedetniemi, *The Achromatic Number of a Graph*, Journal of Combinatorial Theory, **8** (1970), 154–161
- [39] F. Harary, S.T. Hedetniemi, G. Prins, *An interpolation theorem for graphical homomorphisms*, Portugal. Math., **26** (1967), 453–462
- [40] I. Havel, *O zbarvitelnosti rovinných grafů theoremí barvami*, Math. Geometrie a theorie grafů (Praha) (1970) 89–91.
- [41] I. Havel, *On a conjecture of B. Grünbaum*, Journal of Combinatorial Theory **7** (1969) 184–186
- [42] P.J. Heawood, *Map-colour theorem*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, **24** (1890) 332–338
- [43] P.J. Heawood, *On the four-colour map theorem*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, **29** (1898) 270–285
- [44] G. Hernández, *Vigilancia Vigilada*, Actas IV EGC, Granada, (1993)
- [45] T.R. Jensen, C. Thomassen, *The color space of a graph*, J. Graph Theory **34** (3) (2000) 234–245.
- [46] E. Kaiser, *Fiirbungssatze für Graphen auf der projektiven Ebene, den Torus und dem Kleinschen Schlauch*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau, **20** (1974) 47–53
- [47] T. Kaiser, O. Rucký, M. Stehlík, R. Škrekovski, *Strong parity vertex coloring of plane graphs*, IMFM, Preprint series **49** (2011) 1144
- [48] S.K. Kannan, T.J. Warnow, *Triangulating Three-Colored Graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **5** (1992) 249–258

- [49] R.M. Karp, *Reducibility Among Combinatorial Problems*, Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. (1972) 85–103
- [50] A.B. Kempe, *On the geographical problem of the four colours*, American Journal of Mathematics, **2** (1879) 193–200
- [51] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, (1936)
- [52] D. König, *On map coloring*, Matematikai és Fizikai Lapok, **14** (1905) 193–200
- [53] A.A. Kooshesh, B.M.E. Moret, *Folding a Triangulated Simple Polygon: Structural and Algorithmic Results*, Lecture Notes in Computer Science, **497** (1991) 102–110
- [54] M. Krivelevich, R. Yuster, *The Rainbow Connection of a Graph Is (at Most) Reciprocal to Its Minimum Degree*, Journal of Combinatorial Optimization, **21** (3) (2011) 330–347
- [55] H.V. Kronk, *The chromatic number of triangle-free graphs*, Proceedings of the Conference at Western Michigan University, **303** (1972) 179–181
- [56] H.V. Kronk, A.T. White, *A 4-color theorem for toroidal graphs*, Proceedings of the American Mathematical Society, **34** (1972) 83–76
- [57] E. Kubika, *Polynomial algorithm for finding chromatic sum for unicyclic and outerplanar graphs*, to appear in Ars Combinatoria
- [58] E. Kubika, *The chromatic sum of a graph*, Ph.D. Thesis, Western Michigan University, (1989)
- [59] E. Kubicka, A.J. Schwenk, *An introduction to chromatic sums*, Proc. ACM Computer Science Conference (Louisville), ACM Press, New York, (1989), 39–45
- [60] L. Levin, *Universal'nye perebornye zadachi*, Problemy Peredachi Informatsii **9** (3) (1973) 265–266.
- [61] J. Leydold, P.F. Stadler, *Minimal Cycle Bases of Outerplanars Graphs*, SFI WORKING PAPER, (1998-01-011)
- [62] X. Li, S. Liu, *Rainbow vertex-connection number of 2-connected graphs*, arxiv:1110.5770v1[math.CO]2011
- [63] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, 2nd edition, North–Holland, (1993)
- [64] L.R. Matheson, R.E. Tarjan, *Dominating Sets in Planar Graphs*, European Journal of Combinatorics, **17**(6) (1996), 565–568
- [65] C.F. McMorris, T. Warnow, T. Wimer, *Triangulating Colored Graphs* submitted to Information Processing Letters
- [66] J. Mitchem, P. Morriss, *On the cost-chromatic number of graphs*, Discrete Math., **171** (1997), 201–211

- [67] O. Ore, *The Four Color Problem*, Academic Press, New York, **13** (1967)
- [68] O. Ore, M.D. Plummer *Cyclic coloration of plane graphs*, Recent Progress in Combinatorics, Academic Press (1969) 287–293
- [69] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, *The four-color theorem*, J. Combin. Theory B **70** (1997) 2–44
- [70] A. Sainte-Laguë, *Géométrie de situation et jeux*, Mémorial des Sciences Mathématiques, **41** (1929)
- [71] M.R. Salavatipour, *On Sum Coloring of Graphs*, Discrete Appl. Math. **127**(3) (2003) 477–488
- [72] D.P. Sanders, Y. Zhao, *A note on the three color problem*, Graphs Combin. **11** (1995) 91–94
- [73] A. Shen, ed., *Mathematical Entertainments*, Math. Intelligenser **20** (1998), 30–31
- [74] D.N.S. Simamora, A.N.M. Salman, *The Rainbow (Vertex) Connection Number of Pencil Graphs*, Procedia Computer Science **74** (2015), 138–142
- [75] R. Steinberg, *The state of the three color problem, quo vadis, graph theory?* J. Gimbel, J.W. Kennedy, L.V. Quintas (eds.), Ann. Discrete Math. **55** (1993) 211–248.
- [76] L. Stockmayer, *Planar 3-colorability is polynomial complete*, SIGACT News (ACM Publication) **5** (1973) 19–25
- [77] K.J. Supowit, *Finding a maximum planar subset of nets in a channel*, IEEE Trans. Comput. Aided Design CAD **6** **1** (1987) 93–94
- [78] P.G. Tait, *Remarks on the previous communication*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **10** (1878–1880) 729
- [79] C. Thomassen, *Grötzsch’s 3-color theorem and its counterparts for the torus and the projective plane*, J. Combin. Theory Ser. B **62** (2) (1994) 268–279.
- [80] C. Thomassen, P. Erdős, Y. Alavi, P.J. Malde, A.J. Schwenk, *Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph*, J. Graph Theory **13**(3) (1989), 353–357
- [81] B. Toft, *Graph colouring problems*, Institut for Matematik og Datalogi, Odense Universitet, Preprints **2** (1987)
- [82] W. Wang, S. Finbow, P. Wang, *An improved bound on parity vertex colourings of outerplane graphs*, Discrete Math. **312** (2012) 2782–2787
- [83] M.T Tsai, D.B West, *A new proof of 3-colorability of Eulerian triangulations*, Ars Mathematica Contemporanea **4** (1) (2011)
- [84] P. Wernicke, *Über den Kartographischen Vierfarbensatz*, Math. Ann. **58** (1904) 413–426
- [85] R.L. Woodburn, *A 4-color theorem for the Klein bottle*, Discrete Mathematics, **76** (1989) 271–276

- [86] S. Xu, *On Relations between parameters of a graph*, Discrete Mathematics, **89** (1991) 65–88

Este documento esta firmado por



Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Sat Jun 10 18:41:00 CEST 2017
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@fi.upm.es, CN=CA Facultad de Informatica, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
Numero de Serie	630
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)